ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

ТЕНЗОРНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

НИКОЛИНА ВАСИЛЕВА, ЛЮБОМИР ЛИЛОВ

Николина Василева, Любомир Лилов. ТЕНЗОРНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Рассматривается голономная механическая система, для которой в качестве обобщенных координат выбраны не только скалярные, как в классическом случае, а также векторные или тензорные величины. На основе тензорного исчисления разработан соответствующий математический аппарат. Уравнения движения выводятся из вариационного принципа Журдена.

Nikolina Vasileva, Ljubomir Lilov. A TENSORIAL FORM OF LAGRANGE'S EQUATIONS

A holonomic mechanical system is being cosidered for which as generalized coordinates not only scalars are choosen, but vectors and tensors, as well. On the base of the tensor calculation an adequate mathematical apparatus is worked out. The motion equations are being derived from the variational principle of virtual power (the Jourdain's principle).

Лагранжевый формализм является основным методом вывода уравнений движения голономной системы. Уравнения Лагранжа второго рода позволяют избежать определения реакций связей и при помощи минимального числа параметров (обобщенных координат) записать наиболее экономным образом уравнения движения. Их недостатком является использование в качестве обобщенных координат скалярных величин, которые обычно имеют формальный характер и не отражают непосредственно механику изучаемых систем, особено в случаях, когда рассматриваются системы твердых тел. Для таких систем естественные параметры, описывающие положения тел в инерциальном пространстве, имеют уже не скалярный, а векторный и тензорный характер. Например, для одного твердого тела наиболее удобным способом определения его положения является задание радиус-вектора некоторой его точки и тензора вращения, характеризующего угловое положение фиксиранного в теле ортонормированного базиса. Отсюда вытекает необходимость записывания уравнения Лагранжа в случаях, когда обобщенные координаты имеют векторный и более общий тензорный характер. Вывод таких уравнений, которые можно назвать тезорными уравнениями Лагранжа, является основной целью этой работы.

Сначала приведем некоторые сведения из тензорного исчисления и дифференциального исчисления функций тензорных переменных.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство $\mathcal{E}$ и тензоры произвольной валентности на $\mathcal{E}$. Пространство тензоров валентности m будем обозначать через $\mathcal{E}_m$. Если $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T$ — ортонормированный базис пространства $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$, то известно, что всевозможные внешние произведения этих векторов вида $\mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_m}$ $(1 \leqq i_k \leqq 3,\ k = 1, \ldots, m)$ образуют базис пространства $\mathcal{E}_m$. Так как для евклидовых пространств нет принципиальной разницы между коварииантными и контрвариантными индексами тензоров, координаты тензора $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_m$ будем обозначать через $\tau_{i_1 \ldots i_m}$. В этих обозначениях тензор $\mathbf{T}$ имеет представление

$$\mathbf{T} = \tau_{i_1 \ldots i_m} \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_m}$$

(предполагается суммирование от 1 до 3 по каждой паре одинаковых индексов).

Основными тензорными операциями являются внешнее (тензорное) произведение $\mathbf{AB}$ двух тензоров $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_m$ и $\mathbf{B} \in \mathcal{E}_n$, свертка индексов, при помощи которой совершается суммирование по одной или нескольким парам индексов и операция перестановки индексов. При помощи этих операций определяется обобщенное произведение $\mathbf{A} \bigwedge_{(p_1, \ldots, p_k; q_1, \ldots, q_k)} \mathbf{B}$ двух тензоров $\mathbf{A} = \alpha_{i_1 \ldots i_m} \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_m} \in \mathcal{E}_m$ и $\mathbf{B} = \beta_{i_1 \ldots i_n} \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_n} \in \mathcal{E}_m$ как свертывание по парам индексов $(i_{p_1}, i_{q_1}), \ldots, (i_{p_k}, i_{q_k})$ тензорного произведения $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \alpha_{i_1 \ldots i_m} \beta_{i_{m+1} \ldots i_{m+n}} \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_{m+n}}$, где $k \leqq \min(n, m)$, $p_1, \ldots, p_k \leqq m$, $q_1, \ldots, q_k > m$. В зависимости от выбора этих пар можно получить различные типы обобщенного произведения двух тензоров. Легко увидеть, однако, что в случае, когда число пар одно и то же, то посредством подходящей перестановки индексов всегда можно перейти из одного типа обобщенного произведения к другому. Поэтому будем пользоваться только обобщенным произведением, в котором совершается суммирование по следующим k парам индексов: последний индекс тензора $\mathbf{A}$ с первым индексом тензора $\mathbf{B}$, предпоследний индекс тензора $\mathbf{A}$ со вторым индексом тензора $\mathbf{B}$ и т. д. Если $k = 0$, то обобщенное произведение тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяем как внешнее произведение $\mathbf{AB}$, если $k = 1$ будем использовать обычное обозначение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, в общем же случае $1 < k \leqq \min(m, n)$ будем использовать обозначение $\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{B}$. Тензор $\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{B}$ является элементом пространства $\mathcal{E}_{m+n-2k}$.

Введем обозначение ${}^{[k]}\mathbf{A}$ для тензора, полученного из тензора $\mathbf{A}$ перестановкой мест первых k индексов с остальными, т. е.

$$^{[k]}\alpha_{i_1 \ldots i_m} = \alpha_{i_{k+1} \ldots i_m i_1 \ldots i_k} \quad (0 < k < m)$$

и $\mathbf{A}^{[k]}$ для тензора, координаты которого получаются, если записать последние k индексы тензора $\mathbf{A}$ на первых k местах:

$$\alpha^{[k]}_{i_1 \ldots i_m} = \alpha_{i_{m-k+1} \ldots i_m i_1 \ldots i_{m-k}} \quad (0 < k < m).$$

Здесь $\alpha_{i_1 \ldots i_m}, {}^{[k]}\alpha_{i_1 \ldots i_m}, \alpha^{[k]}_{i_1 \ldots i_m}$ — координаты тензоров $\mathbf{A}$, ${}^{[k]}\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{[k]}$ относительно одного и того же базиса. Если $k = 0$ или $k = m$, то по определению

$$^{[0]}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{[0]} = {}^{[m]}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{[m]} = \mathbf{A}.$$

Введем также обозначение $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ для тензора, координаты $\alpha^{\mathrm{T}}_{i_1 \ldots i_m}$ которого определяются равенством

$$\alpha^{\mathrm{T}}_{i_1 \ldots i_m} = \alpha_{i_m \ldots i_1}.$$

Для выбранного правила суммирования в обобщенном произведении $\bigwedge_k$ при произвольных тензорах $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{E}_n$ и $\mathbf{C} \in \mathcal{E}_s$ и целых числах k и l, для которых имеют смысл написанные ниже произведения, справедливы равенства

$$\mathbf{A} \bigwedge_l \left(\mathbf{B} \bigwedge_k \mathbf{C}\right) = \left(\mathbf{A} \bigwedge_p \mathbf{B}\right) \bigwedge_q \mathbf{C},$$

$$\left(\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{B}\right) \bigwedge_l \mathbf{C} = \mathbf{A} \bigwedge_q \left(\mathbf{B} \bigwedge_p \mathbf{C}\right),$$

где $p = \min(l, n-k)$, $q = k + l - p$. Если $l < n - k$, то имеет место ассоциативный закон

(1) $$\mathbf{A} \bigwedge_l \left(\mathbf{B} \bigwedge_k \mathbf{C}\right) = \left(\mathbf{A} \bigwedge_l \mathbf{B}\right) \bigwedge_k \mathbf{C},$$

(2) $$\left(\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{B}\right) \bigwedge_l \mathbf{C} = \mathbf{A} \bigwedge_k \left(\mathbf{B} \bigwedge_l \mathbf{C}\right).$$

Выполнено также и равенство

$$(3) \qquad \left(\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{B}\right) = \left({}^{[k]}\mathbf{B} \bigwedge_k \mathbf{A}^{[k]}\right)^{[m-k]}.$$

Если совершается суммирование по всем индексам тензора $\mathbf{B} \in \mathcal{E}_n$, можно написать

$$\left(\mathbf{A} \bigwedge_n \mathbf{B}\right) \bigwedge_k \mathbf{C} =^{[n]} \left(\mathbf{A}^{[n]} \bigwedge_k \mathbf{C}\right) \bigwedge_n \mathbf{B},$$

$$(4) \qquad \left(\mathbf{A} \bigwedge_n \mathbf{B}\right) \bigwedge_k \mathbf{C} = \left({}^{[k]}\mathbf{C} \bigwedge_k {}^{[m-n-k]}\mathbf{A}\right)^{[m-n-k]} \bigwedge_n \mathbf{B}.$$

Единичный тензор пространства $\mathcal{E}_2$ будем обозначать через $\mathbf{E}_2$. Если $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathbf{T}}$ — произвольный базис в пространстве $\mathcal{E}$, то матрицей координат тензора $\mathbf{E}_2$ является единичная матрица $\underline{E} = (\delta_{ij})_{i,j=1}^3$, при этом $\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$. Тензор $\mathbf{E}_2$ осуществляет тождественное преобразование в пространстве $\mathcal{E}$, т. е. для каждого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ выполнено $\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Кроме того

$$\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{A}, \mathbf{E}_2 \bigwedge_2 \mathbf{A} = \mathbf{A} \bigwedge_2 \mathbf{E}_2 = \mathrm{sp}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{E}_2 \bigwedge_2 (\mathbf{x}\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2, \text{ где } \mathbf{A} \in \mathcal{E}_2.$$

Ту же самую роль в пространстве $\mathcal{E}_2$ выполняет тензор $\mathbf{E}_4$, координаты δ_{ijkl} которого относительно произвольного ортонормированного базиса $\underline{e}$ определяется равенствами $\delta_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk}$, из которых следует, что

$$\mathbf{E}_4 =^{[2]} \mathbf{E}_4 = \mathbf{E}_4^{[2]} = \mathbf{E}_4^{\mathbf{T}} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i.$$

Если $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_2$ и $\mathbf{B} \in \mathcal{E}_4$ — произвольные тензоры с координатами относительно $\underline{e}$ соответственно α_{ij} и β_{ijkl}, то имеют место равенства

$$\mathbf{E}_4 \bigwedge_2 \mathbf{A} = \mathbf{A} \bigwedge_2 \mathbf{E}_4 = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{E}_4 \bigwedge_2 \mathbf{B} = \mathbf{B} \bigwedge_2 \mathbf{E}_4 = \mathbf{B}, \mathbf{E}_4 \bigwedge_4 \mathbf{B} = \beta_{ijji},$$

$$\mathbf{E}_4 \bigwedge_k \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}.$$

Связь между тензорами $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_4$ выражается равенством

$$\mathbf{E}_4 = (\mathbf{E}_2\mathbf{E}_2)^{[1]} =^{[1]} (\mathbf{E}_2\mathbf{E}_2).$$

Если обозначим через $*$ перестановку первого и второго индекса четырехвалентного тензора, то для любого тензора $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_2$ выполнено равенство

$$\mathbf{E}_4^* \underset{2}{\bigwedge} \mathbf{A} = \mathbf{A} \underset{2}{\bigwedge} \mathbf{E}_4^* = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}.$$

Это равенство показывает, что операцию перестановки индексов двухвалентного тензора $\mathbf{A}$ можно представить как результат его умножения на тензор $\mathbf{E}_4^*$. Относительно ортонормированного базиса $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathbf{T}}$ тензор $\mathbf{E}_4^*$ выражается суммой

$$\mathbf{E}_4^* = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

Таким же способом можно использовать тензор $\mathbf{E}_{2m} = \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_m} \mathbf{e}_{i_m} \ldots \mathbf{e}_{i_1}$, чтобы представить тождественное преобразование пространства $\mathcal{E}_m$, а каждый тензор, получающийся перестановкой первых m индексов тензора $\mathbf{E}_{2m}$, осуществляет некоторую операцию перестановки индексов тензоров в пространстве $\mathcal{E}_m$.

Для представления векторного произведения и других операций в пространстве $\mathcal{E}$ важную роль играет трехвалентый тензор $\mathbf{D}$, который по отношению к произвольному ортонормированному базису имеет координаты

$$d_{ijk} = \begin{cases} (-1)^{[i,j,k]}, & \text{где } [i,j,k] \text{ — число инверсии} \\ & \text{в перестановке } (i,j,k) \text{ чисел } 1,\ 2,\ 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом тензор $\mathbf{D}$ можно представить в виде.

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2.$$

Имеют место формулы

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E}_4^* - \mathbf{E}_4, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \underset{2}{\bigwedge} \mathbf{D} &= -2\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{D} \underset{3}{\bigwedge} \mathbf{D} = -6, \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D}, \ (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \underset{2}{\bigwedge} \mathbf{D} = -2\mathbf{D}, \\ (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})^{[1]} &\underset{2}{\bigwedge} \mathbf{D} = -\mathbf{D}. \end{aligned} \tag{6}$$

При перестановке любых двух индексов тензора $\mathbf{D}$ получаем тензор $-\mathbf{D}$. Такие тензоры называются кососимметрическими. Все кососимметрические тензоры третьей валентности получаются из тензора $\mathbf{D}$ умножением на некоторое число.

Двухвалентные кососимметрические тензоры имеют кососимметрическую матрицу координат и называются также бивекторами.

Ряд тензорных операций можно представить как умножение на тензор $\mathbf{D}$. Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть $\mathbf{a} \in \mathcal{E}, \mathbf{B} \in \mathcal{E}_2, \mathbf{C} \in \mathcal{E}_3$ и α_i, β_{ij} и γ_{ijk} — их координаты относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}$. Произведения $-\mathbf{D} \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{E}_2$ и $-\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{E}_3$ обозначим через $\widetilde{\mathbf{a}}$ и $\widetilde{\mathbf{B}}$. Можно записать, что

$$\widetilde{\mathbf{a}} = -\mathbf{D}\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{B}} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} = \beta_{ij} \widetilde{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 & 0 & -\mathbf{b}_1 \\ -\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{b} = \beta_{ij} \mathbf{e}_j$.

Тензор $\widetilde{\mathbf{a}}$ — кососимметрический. Наоборот, если $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_2$ — кососимметрический, то существует вектор $\mathbf{a} \in \mathcal{E}$, для которого $\widetilde{\mathbf{a}} = \mathbf{A}$. Каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ тензор $\widetilde{\mathbf{a}}$ сопоставляет вектор $\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$, а общее решение уравнения $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{a} \neq 0$ можно записать в виде

$$\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{p}, \tag{7}$$

где $\mathbf{p}$ — произвольный вектор. Используя равенства (5) и (6), получаем формулы

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}} = \widetilde{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} = \mathbf{ba} - \mathbf{ab},$$

$$\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\mathbf{b}} = \mathbf{ba} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{a} \doteq \frac{1}{2} \mathbf{D} \bigwedge_2 \widetilde{\mathbf{a}}. \tag{8}$$

Отметим еще равенства

$$-\mathbf{D} \bigwedge_2 (\mathbf{ab}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, -\mathbf{D} \bigwedge_3 (\mathbf{abc}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c},$$

$$(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \bigwedge_3 (\mathbf{abc}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c},$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — произвольные векторы.

Остановимся теперь на альтернацию индексов. Она определяется следующим образом. Рассмотрим всевозможные тензоры, полученные из данного тензора валентности m перестановкой n выбранных его индексов ($n \leq m$). Каждый такой тензор берем со знаком плюс или минус в зависимости от того, является ли перестановка четной или нечетной и проводим усреднение по всем $n!$ тензорам . Полученное среднее арифметическое является кососимметрическим тензором по выбранным n индексам. Этот тензор называется альтернацией изходного тензора по указанным индексам. Если совершается альтернация по всем индексам тензора $\mathbf{A}$, то полученный тензор обозначается через $\mathrm{Alt}(\mathbf{A})$ ([1]).

Нетрудно показать, что если $\mathbf{C} \in \mathcal{E}_3$ имеет координаты γ_{ijk}, то произведение

$$\frac{1}{3}\mathbf{D} \bigwedge_3 \mathbf{C} = \frac{1}{6}(\gamma_{123} + \gamma_{231} + \gamma_{312} - \gamma_{321} - \gamma_{213} - \gamma_{123}) \in \mathcal{E}_0$$

является единственной существенной координатой кососимметрического тензора $\mathrm{Alt}(\mathbf{C})$. Сам тензор $\mathrm{Alt}(\mathbf{C})$ представляется в виде $\frac{1}{6}(\mathbf{DD}) \bigwedge_3 \mathbf{C}$.

Для тензора $\mathbf{B} \in \mathcal{E}_2$ справедливо соотношение

$$\mathrm{Alt}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}^{\mathbf{T}}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{E}_4^* - \mathbf{E}_4) = -\frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \bigwedge_2 \mathbf{B} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}\left(\mathbf{D} \bigwedge_2 \mathbf{B}\right).$$

Тензор $\mathbf{D} \bigwedge_2 \mathbf{B}$ будем обозначать через $\underset{\times}{\mathbf{B}}$ ([2]). Он имеет координаты $\beta_{23} - \beta_{32}$, $\beta_{31} - \beta_{13}$, $\beta_{12} - \beta_{21}$, откуда следует, что если $\mathbf{B}$ — симметрический тензор (т. е. его матрица координат - симметрическая), то $\mathbf{D} \bigwedge_2 \mathbf{B} = 0$.

Введем евклидову норму в пространстве

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum \alpha^2_{i_1 \dots i_m}} = \sqrt{\mathbf{E}_{2m} \bigwedge_{2m} \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}},$$

где $\alpha_{i_1 \dots i_m}$ — координаты тензора $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_m$ относительно некоторого ортонормированного базиса. Известно, что имеют место зависимости

$$\|\mathbf{A}\| > 0, \quad \text{если} \quad \mathbf{A} \neq \mathbf{O}_m,$$

$$\|c\mathbf{A}\| = |c|\|\mathbf{A}\|, \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leqq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|,$$

$$\|\mathbf{AB}\| = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|, \|\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{B}\| \leqq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|, \ \mathbf{A} \in \mathcal{E}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{E}_n, \ k \leqq \min(n, m),$$

$$\|\mathbf{A}^*\| = \|\mathbf{A}\|,$$

где через $*$ обозначена некоторая перестановка индексов тензора $\mathbf{A}$.

Если $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_{m+n}$, то произведение $\mathbf{A} \bigwedge_m \mathbf{T}$, где $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_m$, является элементом пространства $\mathcal{E}_n$. Из линейности обобщенного произведения следует, что с помощью произведения $\mathbf{A} \bigwedge_m \mathbf{T}$ тензор $\mathbf{A}$ задает линейный оператор, действующий из пространства $\mathcal{E}_m$ в пространство $\mathcal{E}_n$. Кроме того, как линейный оператор на конечномерном пространстве, этот оператор непрерывен [3]. Наоборот, для каждого линейного непрерывного отображения $f\colon \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$ можно определить тензор $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_{m+n}$, удовлетворяющий равенству

$$f(\mathbf{T}) = \mathbf{A} \bigwedge_m \mathbf{T}, \mathbf{T} \in \mathcal{E}_m. \tag{9}$$

Следовательно, введя обобщенное произведение $\mathbf{A} \bigwedge_m \mathbf{T}$, можно рассматривать пространство $\mathcal{E}_{m+n}$ как пространство $\mathcal{L}(\mathcal{E}_m; \mathcal{E}_n)$ линейных непрерывных отображений $\mathcal{E}_m$ на $\mathcal{E}_n$, а за норму линейного отображения $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n)$ можно принять норму определенного равенством (9) тензора $\mathbf{A}$, т. е. $||f|| = ||\mathbf{A}||$.

Определенная таким образом норма линейных отображений имеет еще свойства

$$||f(\mathbf{T})|| \leqq ||f||||\mathbf{T}||,$$
$$||f \circ g|| \leqq ||f||||g||,$$

где $f \circ g$ — композиция линейных отображений f и g.

Допустим, что в открытом непустом множестве $U \subset \mathcal{E}_m$ определено непрерывное отображение $f\colon U \to \mathcal{E}_n$. Рассматривая пространство $\mathcal{E}_{m+n}$ как пространство линейных непрерывных отображений пространства $\mathcal{E}_m$ в пространство $\mathcal{E}_n$, производное отображение отображения f в точке $\mathbf{T} \in U$ определяем как тензор $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_{m+n}$, для которого выполняется равенство

$$||f(\mathbf{T} + \mathbf{H})|| = f(\mathbf{T}) + \mathbf{A} \bigwedge_m \mathbf{H} + o(\mathbf{H}),$$

где $\lim_{||\mathbf{H}|| \to 0} \dfrac{||o(\mathbf{H})||}{||\mathbf{H}||} = 0$ и $\mathbf{T} + \mathbf{H} \in U$.

Производное отображение обозначим через $\dfrac{df}{d\mathbf{H}}$.

Дифференциал $df \in \mathcal{E}_n$ функции $f(\mathbf{T})$ задается равенством

$$df = \frac{df}{d\mathbf{T}} \bigwedge_m d\mathbf{T}$$

и является функцией двух переменных $\mathbf{T} \in U$ и $\mathbf{H} \in \mathcal{E}_m$.

Так как пространства $\mathcal{E}_m$ и $\mathcal{E}_n$ — банаховые, то справедливы все теоремы о дифференцируемых отображениях банаховых пространств. Поэтому отметим только некоторые формулы для вычисления производных.

1. Если функции $f\colon \mathcal{E}_s \to \mathcal{E}_n$ и $g\colon \mathcal{E}_s \to \mathcal{E}_n$ — дифференцируемые в точке $\mathbf{T} \in U \subset \mathcal{E}_s$ и $k \leqq \min(m, n)$, то имеют место следующие формулы о дифференцировании обобщенного произведения тензоров [3]:

$$\frac{d}{d\mathbf{T}} \left(f \bigwedge_k g \right) =^{[s]} \left[\frac{df^{[s]}}{d\mathbf{T}} \bigwedge_k g \right] + f \bigwedge_k \frac{dg}{d\mathbf{T}}. \tag{10}$$

$$d\left(f\bigwedge_k g\right) = df\bigwedge_k g + f\bigwedge_k dg.$$

Формулу (10) можно записать в другом виде:

$$\frac{d}{d\mathbf{T}}\left(f\bigwedge_k g\right) = \left[{}^{[k]}g\bigwedge_k{}^{[m-k]}\frac{df}{d\mathbf{T}}\right]^{[m-k]} + f\bigwedge_k\frac{dg}{d\mathbf{T}}, \tag{11}$$

в котором валентности n и s не проявляются явным образом. От них зависит только валентность тензоров $\frac{df}{d\mathbf{T}} \in \mathcal{E}_{m+s}$ и $\frac{dg}{d\mathbf{T}} \in \mathcal{E}_{n+s}$. Частными случаями формулы (10) являются следующие равенства:

$$\frac{d}{d\mathbf{T}}\left(f\bigwedge_k g\right) = \frac{df}{d\mathbf{T}}\bigwedge_k g + f\bigwedge_k\frac{dg}{d\mathbf{T}}, \text{ если } \mathbf{T}\in\mathcal{E}_0, \tag{12}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{T}} = \mathbf{E}_{2s}, \quad \mathbf{T}\in\mathcal{E}_s;$$

$$\frac{d}{d\mathbf{T}}\left(\mathbf{A}\bigwedge_k\mathbf{T}\right) = \mathbf{A}\bigwedge_k\mathbf{E}_{2s}. \tag{13}$$

2. Если $g: \mathcal{E}_s \to \mathcal{E}_m$ и $f: \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$ и $g(\mathbf{T})$ и $f(\mathbf{Y})$ — дифференцируемые функции соответственно в окрестностях точек $\mathbf{T}_0 \in \mathcal{E}_s$ и $\mathbf{Y}_0 = g(\mathbf{T}_0) \in \mathcal{E}_m$, то функция $f\circ g: \mathcal{E}_s \to \mathcal{E}_n$, определенная равенством $f\circ g(\mathbf{T}) = f(g(\mathbf{T}))$, — дифференцируемая в точке $\mathbf{T}_0$ и

$$\frac{d}{d\mathbf{T}}(f\circ g)(\mathbf{T}_0) = \frac{df}{d\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_0)\bigwedge_m\frac{dg}{d\mathbf{T}}(\mathbf{T}_0),$$

$$d(f\circ g)(\mathbf{T}_0) = \frac{df}{d\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_0)\bigwedge_m dg(\mathbf{T}_0).$$

3. Пусть функции $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(t) \in \mathcal{E}_{\nu_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ — дифференцируемые в точке $t_0 \in (\alpha,\beta) \subset R$, $\mathbf{X}_i(t_0) = \mathbf{X}_i^0$ и функция $\mathbf{Z} = f(t, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) \in \mathcal{E}_p$ — дважды дифференцируемая в окрестности точки $(t, \mathbf{X}_1^0, \ldots, \mathbf{X}_n^0)$. Рассмотрим составную функцию $\mathbf{Z}(t) = f(t, \mathbf{X}_1(t), \ldots, \mathbf{X}_n(t))$. Из теоремы о дифференцировании составных функции вытекает, что производная в точке t_0 функции $\mathbf{Z}(t)$ существует и вычисляется по формуле

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_i}\bigwedge_{\nu_i}\dot{\mathbf{X}}_i, \tag{14}$$

а ее дифференциал определяется из равенства

$$d\mathbf{Z} = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_i}\bigwedge_{\nu_i}d\mathbf{X}_i \tag{15}$$

($\dot{\mathbf{X}}_i$ — производная функции $\mathbf{X}_i$ по отношению к переменной t, $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_i}$ — частные производные функции f по отношению к $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$).

Рассматривая производную $\dfrac{d\mathbf{Z}}{dt} = \dot{\mathbf{Z}}$ как функцию переменных t, $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n, \dot{\mathbf{X}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{X}}_n$ и пользуясь симметричностью второй производной дважды дифференцируемой функции, можно доказать равенство

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_i}\frac{d\mathbf{Z}}{dt} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{16}$$

Как приложение полученных формул рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Пусть задана скалярная функция векторного аргумента $f(\mathbf{r})$. Если x_1, x_2, x_3 — координаты вектора $\mathbf{x}$ относительно некоторого базиса $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathbf{T}}$, можно записать $f(\mathbf{r}) = \hat{f}(x_1, x_2, x_3)$. Покажем, что $\dfrac{df}{d\mathbf{r}} = \operatorname{grad}\hat{f}$.

Действительно, применяя теорему о дифференцировании составных функций, получаем

$$\frac{df}{d\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{d\mathbf{r}}.$$

Так как $x_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$, то $\dfrac{dx_i}{d\mathbf{r}} = \dfrac{d}{d\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i)$.

Пользуясь формулой (13) находим, что

$$\frac{dx_i}{d\mathbf{r}} = \mathbf{e}_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

откуда следует, что $\dfrac{df}{d\mathbf{r}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\mathbf{e}_i = \operatorname{grad}\hat{f}$.

2) Рассмотрим векторное поле, определенное векторной функцией $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$. Аналогичным примеру 1) образом, представляя вектор $\mathbf{a}$ суммой

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_i,$$

где $a_i(x_1, x_2, x_3)$ — скалярные функции, получаем

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\mathbf{e}_j\right)\mathbf{e}_i.$$

Следовательно, производная $\dfrac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}$ является тензором второй валентности, матрица которого относительно базиса имеет вид $(a_{ij})_{i,j=1}^{3}$, где $a_{ij} = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_j}$.

Важными характеристиками векторного поля являются $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}$ и $\mathrm{div}\,\mathbf{a}$. По определению

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3$$

и его можно записать в виде

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = -\left(\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}\right)_{\times} = -\mathbf{D}\bigwedge_{2}\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}.$$

Для $\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}$ получаем выражение

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \mathbf{E}_2\bigwedge_{2}\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}.$$

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В этом параграфе основные величины, определяющие абсолютное и относительное движение точки и абсолютно твердого тела, будут представлены в тензорном виде, удобном для дальнейших рассмотрений.

Рассмотрим сначала движение точки M относительно двух координатных систем — абсолютной, $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, и относительной, $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$. Абсолютное и относительное движение определяются векторными функциями $\mathbf{r}(t) = \overline{OM}(t)$ и $\mathbf{r}'(t) = \overline{O'M}(t)$. Предполагаем также, что известно движение пространства $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ относительно пространства $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Пусть оно задается вектором $\mathbf{r}_0(t) = \overline{OO'}$, переводящим точку O в точку O', и тензором углового положения $\mathbf{Z} = \mathbf{e}'^{\mathrm{T}}\mathbf{e} = \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3$. Очевидно,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t).$$

Вектор $\mathbf{r}'$ представляется своими координатами относительно базиса $\mathbf{e}'$ суммой

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}'_1)\mathbf{e}'_1 + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}'_2)\mathbf{e}'_2 + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_3.$$

Применяя формулу (2), записываем $\mathbf{r}'$ в виде $\mathbf{r}'\cdot(\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}'_3)$. Таким образом получаем, что координатную запись данного вектора относительно некоторого ортонормированного базиса $\underline{\mathbf{e}}'$ можно получить путем умножения вектора на единичный тензор $\mathbf{E}_2$, представленный в виде

$$\mathbf{E}_2 = \underline{\mathbf{e}}'^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{e}}' = \mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}'_3.$$

Относительными скоростью и ускорением точки M называются векторы

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}'} = (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}'_1)^{\boldsymbol{\cdot}}\,\mathbf{e}'_1 + (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}'_2)^{\boldsymbol{\cdot}}\,\mathbf{e}'_2 + (\mathbf{r}'^{\boldsymbol{\cdot}}\,\mathbf{e}'_3)\cdot\mathbf{e}'_3,$$

$$\overset{\circ\circ}{\mathbf{r}'} = (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_1')^{\cdot\cdot}\mathbf{e}_1' + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_2')^{\cdot\cdot}\mathbf{e}_2' + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_3')^{\cdot\cdot}\mathbf{e}_3'.$$

Чтобы найти зависимость между абсолютными и относительными скоростями и ускорениями точки, рассмотрим сначала движение базиса $\mathbf{e}'$ относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}$, которое определяется тензором $\mathbf{Z}$. Матрица координат тензора Z относительно любого ортонормированного базиса является ортонормированной. Такие тензоры будем называть ортонормированными. Совокупность всех ортонормированных тензоров образует группу вращений.

Для ортонормированного тензора $\mathbf{Z}$ в каждый момент времени выполняется равенство

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} = \mathbf{E}_2. \tag{17}$$

Дифференцируя относительно t, получаем, что

$$\dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} + \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{T}} = \mathbf{O}_2,$$

где $\mathbf{O}_2$ — нулевый элемент пространства $\mathcal{E}_2$. Таким образом получаем, что тензор $\dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{T}} = -(\dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}})$ является кососимметрическим, и поэтому можно найти вектор $\overline{\omega}$, для которого

$$\tilde{\overline{\omega}} = \dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{T}}. \tag{18}$$

Вектор $\overline{\omega}$ называется абсолютной угловой скоростью базиса $\underline{\mathbf{e}}'$ (тензора $\mathbf{Z}$).

Используя равенство (17), записываем вектор $\mathbf{r}'$ в виде $\mathbf{r}' = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} = \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}'$, откуда находим, что $\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{u}}$. Так как $\dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{Z}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} + \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} + \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet}$, то умножение слева на тензор $\mathbf{Z}$ приводит к выражению

$$\mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_1'(\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} + \mathbf{e}_2'(\mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} + \mathbf{e}_3'(\mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} = \overset{\circ}{\mathbf{r}'}.$$

Применяя формулу (18) для слагаемого $\dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{u} = \dot{\mathbf{Z}} \cdot (\mathbf{Z}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}')$, находим, что

$$\dot{\mathbf{r}}' = \tilde{\overline{\omega}} \cdot \mathbf{r}' + \overset{\circ}{\mathbf{r}'} = \overline{\omega} \times \mathbf{r}' + \overset{\circ}{\mathbf{r}'}.$$

Отсюда получаем связь между абсолютной скоростью $\dot{\mathbf{r}}$ точки и ее относительной скоростью $\overset{\circ}{\mathbf{r}'}$:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \overline{\omega} \times \mathbf{r}' + \overset{\circ}{\mathbf{r}'}.$$

Дифференцируя это равенство еще раз, получаем

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\overline{\omega}} \times \mathbf{r}' + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\overline{\omega} \times \overset{\circ}{\mathbf{r}'} + \overset{\circ\circ}{\mathbf{r}'}.$$

В частном случае, когда $O = O'$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} = \text{const}$, т.е. когда точка M — неподвижная относительно пространства $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$, получаем, что

$$\dot{\mathbf{r}} = \overline{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Рассмотрим теперь вращение некоторого ортонормированного базиса относительно другого. Пусть в абсолютном пространстве заданы два вращающихся ортонормированных базиса $\underline{\mathbf{e}}^{(1)} = (\mathbf{e}_1^{(1)}, \mathbf{e}_2^{(1)}, \mathbf{e}_3^{(1)})^{\mathbf{T}}$ и $\underline{\mathbf{e}}^{(2)} = (\mathbf{e}_1^{(2)}, \mathbf{e}_2^{(2)}, \mathbf{e}_3^{(2)})^{\mathbf{T}}$ и неподвижный базис $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathbf{T}}$. Тензоры

$$\mathbf{Z}_1 = \underline{\mathbf{e}}^{(1)\mathbf{T}}\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{Z}_2 = \underline{\mathbf{e}}^{(2)\mathbf{T}}\underline{\mathbf{e}} \tag{19}$$

определяют вращения, приводящие базис $\underline{\mathbf{e}}$ соответственно в базисы $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ и $\underline{\mathbf{e}}^{(2)}$ и таким образом задают абсолютные вращения этих базисов. Их абсолютные угловые скорости $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ получаем из равенства

$$\tilde{\overline{\omega}}_1 = \dot{\mathbf{Z}}_1 \cdot \mathbf{Z}_1^{\mathbf{T}} = \dot{\underline{\mathbf{e}}}^{(1)^{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \quad \tilde{\overline{\omega}}_2 = \dot{\mathbf{Z}}_2 \cdot \mathbf{Z}_2^{\mathbf{T}} = \dot{\underline{\mathbf{e}}}^{(2)^{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{e}}^{(2)}. \tag{20}$$

Матрицы координат тензоров $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ в базисе $\underline{\mathbf{e}}$ можно получить, умножив слева равенства (19) на единичный тензор $\mathbf{E}_2 = \underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{e}}$ и применив ассоциативный закон

$$\mathbf{Z}_1 = (\underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{e}}) \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(1)\mathbf{T}}\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(1)\mathbf{T}})\underline{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{Z}_2 = \underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(2)\mathbf{T}})\underline{\mathbf{e}}^{(2)}.$$

Дифференцируем относительно времени

$$\dot{\mathbf{Z}}_1 = \underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(1)^{\mathbf{T}}})^{\bullet}\underline{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{Z}}_2 = \underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(2)^{\mathbf{T}}})^{\bullet}\underline{\mathbf{e}}, \tag{21}$$

откуда следует, что матрицы $(\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(1)^{\mathbf{T}}})^{\bullet}$ и $(\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(2)^{\mathbf{T}}})^{\bullet}$ являются матрицами координат тензоров $\dot{\mathbf{Z}}_1$ и $\dot{\mathbf{Z}}_2$ относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}$. Рассмотрим тензор

$$\Phi = \underline{\mathbf{e}}^{(2)^{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{e}}^{(1)},$$

определяющий вращение базиса $\underline{\mathbf{e}}^{(2)}$ относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$. Тензор Φ выражается тензорами $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ по формуле

$$\Phi = \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1^{\mathbf{T}}. \tag{22}$$

Матрицу координат тензора Φ относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ получим, умножив слева равенство (22) на тензор $\mathbf{E}_2$, который сейчас записываем как произведение $\underline{\mathbf{e}}^{(1)^{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$:

$$\Phi = \mathbf{E}_2 \cdot \Phi = \underline{\mathbf{e}}^{(1)\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(2)\mathbf{T}})\underline{\mathbf{e}}^{(1)}.$$

Аналогично формулам (21) и (20) вводим тензор

$$\mathring{\Phi} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(2)\mathbf{T}})^{\bullet}\underline{\mathbf{e}}^{(1)},$$

который будем называть производной тензора Φ по времени относительно базиса $\underline{e}^{(1)}$ и вектор $\overline{\Omega}$, определенный равенствами

$$
\begin{aligned}
\overline{\Omega} &= \overset{\circ}{\Phi}\cdot\Phi^{\mathrm{T}}, \\
\overline{\Omega} &= \frac{1}{2}\mathbf{D}\bigwedge_2\tilde{\tilde{\Omega}},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

который является относительной угловой скоростью базиса по отношению к базису $\underline{e}^{(1)}$.

Чтобы найти зависимость между тензорами $\overline{\Omega}$, $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, подставляем выражение $\Phi^{\mathrm{T}} = \underline{e}^{(1)^{\mathrm{T}}}\underline{e}^{(2)}$ в (23) и после применения правила дифференцирования (12) для произведения $\underline{e}^{(1)}\cdot\underline{e}^{(2)^{\mathrm{T}}}$ получаем

$$\tilde{\tilde{\Omega}} = \underline{e}^{(1)^{\mathrm{T}}}(\underline{\dot{e}}^{(1)}\cdot\underline{e}^{(2)^{\mathrm{T}}} + \underline{e}^{(1)}\cdot\underline{\dot{e}}^{(2)^{\mathrm{T}}})\underline{e}^{(1)}\cdot\underline{e}^{(1)^{\mathrm{T}}}\underline{e}^{(2)}.$$

Используя равенства $\underline{e}^{(1)^{\mathrm{T}}}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(2)^{\mathrm{T}}}\underline{e}^{(2)} = \mathbf{E}_2$ и

$$\underline{e}^{(1)}\cdot\underline{e}^{(1)^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \\ e_3^{(1)} \end{pmatrix}\cdot(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и формулы (20), находим, что $\tilde{\tilde{\Omega}} = -\tilde{\tilde{\omega}}_1 + \tilde{\tilde{\omega}}_2$, откуда следует равенство

$$\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 + \overline{\Omega}. \tag{24}$$

Вторым основным объектом изучения в аналитической маханике является абсолютно твердое тело. Его положение в абсолютном пространстве определяется неизменно связанной с телом декартовой координатной системой $O'e_1'e_2'e_3'$. Если $Oe_1e_2e_3$ — неподвижная декартова координатная система, то абсолютное движение базиса $O'e_1'e_2'e_3'$ задается функциями $\mathbf{r}_0(t) = \overline{OO'}$ и $\mathbf{Z}(t) = e_1'e_1 + e_2'e_2 + e_3'e_3$. Его абсолютная угловая скорость определяется равенством

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\bigwedge_2\dot{\mathbf{Z}}\cdot\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}.$$

Если M — произвольная точка тела и $\mathbf{r} = \overline{OM}$, то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 + \overline{\omega}\times\mathbf{r}, \tag{25}$$

где $\mathbf{u}$ — векторная константа, определяемая начальными положениями точек O' и M, $\mathbf{u} = \overline{OM}(t_0)$.

В формуле (25) первое слагаемое определяет поступательное движение тела, а второе — вращение пространства вокруг точки O', которое приводит репер $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в репер $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$. При этом вращении каждая точка M переходит из своего начального положения $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0(t_0) + \mathbf{Z}(t_0) \cdot \mathbf{u}$ в положение $\mathbf{r}(t)$ в момент времени t. Таким образом при известных функциях $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{Z}(t)$ формула (25) определяет движение точки M тела относительно координатной системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Пусть теперь $\mathbf{J}_c$ — тензор инерции тела относительно некоторой его точки C. Предположим, что в точке C задан ортонормированный базис $\underline{\mathbf{e}}''(t_0) = (\mathbf{e}''_1(t_0), \mathbf{e}''_2(t_0), \mathbf{e}''_3(t_0))^{\mathbf{T}}$ и обозначим через $\underline{J_c} = (J_{ij})^3_{i,j=1}$ матрицу тензора в этом базисе. Изменение векторов $\mathbf{e}''_i(t)$ в абсолютном пространстве определяется формулами

$$(26) \qquad \mathbf{e}''_i(t) = \mathbf{Z}(t) \cdot \mathbf{e}''_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

В каждом моменте времени тензор $\mathbf{J}_c$ имеет вид $\mathbf{J}_c = \underline{\mathbf{e}}''^{\mathbf{T}}(t)\underline{J_c}\,\underline{\mathbf{e}}''(t)$. Выражая векторы $\mathbf{e}''_i(t)$ по формуле (26), получается, что тензор $\mathbf{J}_c$ можно представить в виде

$$(27) \qquad \mathbf{J}_c = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{J}_0^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}},$$

где $\mathbf{J}_0$, подобно $\mathbf{u}$ в формуле (25), является постоянным (симметрическим) тензором

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_c(t_0) = \underline{\mathbf{e}}''^{\mathbf{T}}(t_0)\underline{J_c}\,\underline{\mathbf{e}}''(t_0).$$

Если рассматриваемое тело несвободное, то величины $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{Z}$ выражаются посредством других тензорных величин $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(t) \in \mathcal{E}_{\nu_i}$ $(i = 1, \dots, n)$, которые определяются ограничениями, наложенными другими телами на движение тела.

Покажем, что имеют место соотношения

$$(28) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}_i} = {}^{[1]}\tilde{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{X}_i} = -\tilde{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i},$$

$$(29) \qquad \frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \mathbf{X}_i} = 2\,{}^{[1]}\tilde{\mathbf{J}}_c \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Найдем сначала выражение для тензора $\tilde{\tilde{\omega}} = \dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}$. Для вычисления производной $\dot{\mathbf{Z}}$ применяем теорему о дифференцировании составных функций

$$\dot{\mathbf{Z}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i} \bigwedge_{\nu_i} \dot{\mathbf{X}}_i.$$

Переставляя, согласно правилу (4), сомножители в выражении для $\tilde{\tilde{\omega}}$, получаем

$$\widetilde{\widetilde{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{Z} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i}\right]^{[1]} \bigwedge_{\nu_i} \dot{\mathbf{X}}_i, \tag{30}$$

откуда, так как произведения в скобках не зависят от $\dot{\mathbf{X}}_i$, следует формула

$$\frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \left[\mathbf{Z} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i}\right]^{[1]} = -\mathbf{Z} \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{X}_i} \in \mathcal{E}_{\nu_i+2}.$$

Последное равенство получается дифференцрованием равенства $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_2$ относительно переменной $\mathbf{X}_i$. Таким образом тензор второй валентности $\widetilde{\widetilde{\omega}}$ представляется суммой

$$\widetilde{\widetilde{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{\widetilde{\omega}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \bigwedge_{\nu_i} \dot{\mathbf{X}}_i.$$

Имея в виду формулу (8) и используя свойство (13), получаем также зависимость

$$\begin{aligned} \overline{\omega} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \bigwedge_{\nu_i} \dot{\mathbf{X}}_i, \\ \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} &= \frac{1}{2} \mathbf{D} \bigwedge_{2} \frac{\partial \widetilde{\widetilde{\omega}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \in \mathcal{E}_{\nu_i+1}. \end{aligned} \tag{31}$$

С другой стороны, $\widetilde{\widetilde{\omega}} = -\mathbf{D} \cdot \overline{\omega}$ и таким образом

$$\frac{\partial \widetilde{\widetilde{\omega}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = -\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i},$$

$$\mathbf{Z} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i} = -^{[1]} \left(\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}\right), \qquad \mathbf{Z} \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{X}_i} = \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}. \tag{32}$$

Применяя правило (11) и используя равенства $\mathbf{u} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Z}$, вычисляем производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}_i} &= \left[\mathbf{u} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i}\right]^{[1]} = \left[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}) \cdot (\mathbf{Z} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i})\right]^{[1]} \\ &= \left[\mathbf{r} \cdot (\mathbf{Z} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i})\right]^{[1]} = -\left[\mathbf{r} \cdot^{[1]} (\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i})\right]^{[1]}. \end{aligned}$$

В последнем произведении производится свертывание вектора со вторым индексом тензора $\mathbf{D}$. Так как тензор $\mathbf{D}$ — кососимметрический, то это произведение можно записать в виде

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{D}) \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = -\widetilde{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}.$$

Таким образом формула (28) доказана.

Чтобы вычислить производную $\dfrac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \mathbf{X}_i} \in \mathcal{E}_{\nu_i+2}$, проводим следующие преобразования:

$$\frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \mathbf{X}_i} = \left[\mathbf{Z}\cdot \mathbf{J}_0^{\mathbf{T}}\cdot{}^{[1]}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i}\right]^{[1]} + \mathbf{Z}\cdot \mathbf{J}_0\cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{X}_i}$$

$$= \left[(\mathbf{Z}\cdot \mathbf{J}_0^{\mathbf{T}}\cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\cdot \mathbf{Z})\cdot{}^{[1]}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i}\right]^{[1]} + \mathbf{Z}\cdot \mathbf{J}_0\cdot(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\cdot \mathbf{Z})\cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{X}_i}$$

$$= \left[\mathbf{J}_c^{\mathbf{T}}\cdot(\mathbf{Z}\cdot{}^{[1]}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i})\right]^{[1]} + \mathbf{J}_c\cdot\left(\mathbf{Z}\cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{X}_i}\right)$$

$$= -\left[\mathbf{J}_c^{\mathbf{T}}\cdot{}^{[1]}\left(\mathbf{D}\cdot\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{X}_i}\right)\right]^{[1]} + \mathbf{J}_c\cdot\left(\mathbf{D}\cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{X}_i}\right).$$

Используя, что в первом слагаемом первый индекс тензора свертывается со вторым индексом тензора $\mathbf{D}$, получаем произведение

$$-{}^{[1]}(\mathbf{D}\cdot \mathbf{J}_c)\cdot\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{X}_i} ={}^{[1]} \widetilde{\mathbf{J}}_c\cdot\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{X}_i}.$$

Кроме того, $\mathbf{J}_c\cdot \mathbf{D} = (\mathbf{D}\cdot \mathbf{J}_c)^{[1]} = {}^{[1]}(\widetilde{\mathbf{J}}_c^{\mathbf{T}})$, откуда находим, что

$$\frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \mathbf{X}_i} = {}^{[1]}(\widetilde{\mathbf{J}}_c + \widetilde{\mathbf{J}}_c^{\mathbf{T}})\cdot\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{X}_i}.$$

Формула (29) следует из симметричности тензора $\mathbf{J}_c$.

Найдем производные угловой скорости $\overline{\omega}$ и тензора $\widetilde{\omega}$ относительно тензора $\mathbf{Z}$. Из равенства (11) получаем

$$\frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} = \left(\mathbf{Z}\cdot{}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{Z}}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}}\right)^{[1]} = (\mathbf{Z}\cdot{}^{[1]}\mathbf{E}_4)^{[1]} = (\mathbf{Z}\mathbf{E}_2)^{[1]},$$

$$\frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \mathbf{Z}} = -\left(\dot{\mathbf{Z}}\cdot{}^{[1]}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}}\right)^{[1]} = -(\dot{\mathbf{Z}}\cdot{}^{[1]}\mathbf{E}_4)^{[1]} = -(\dot{\mathbf{Z}}\mathbf{E}_2)^{[1]}.$$

Отсюда, умножая слева на тензор $\frac{1}{2}\mathbf{D}$, вычисляем производные

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{Z}} = -\frac{1}{2}{}^{[1]}(\mathbf{D}\cdot\dot{\mathbf{Z}}), \qquad \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} = \frac{1}{2}{}^{[1]}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{Z}). \tag{33}$$

Наконец рассмотрим вопросы, связанные с параметризацией ортонормированных тензоров. Обычно, чтобы параметризировать данный ортонормированный тензор $\mathbf{Z}$, рассматривается его матрица координат относительно некоторого ортонормированного базиса $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathbf{T}}$. Так как тензор $\mathbf{Z}$ — ортонормированный, то его координаты можно выразить посредством трех скалярных величин ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3. Производные $\dfrac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \phi_i}$ являются тензорами второй валентности и удовлетворяют соотношениям

$$\left(\mathbf{Z} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \phi_i}\right)^{[1]} + \mathbf{Z} \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}}{\partial \phi_i} = \mathbf{O}_2,$$

откуда, следуя выводу формулы (18), получаем, что существуют векторы $\mathbf{p}_i$, для которых выполняются равенства

$$\widetilde{\mathbf{p}}_i = \left(\mathbf{Z} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \phi_i}\right)^{[1]} = -\mathbf{Z} \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}}{\partial \phi_i} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{34}$$

Если $\phi_i = \phi_i(t)(i = 1, 2, 3)$, то угловая скорость $\overline{\omega}$ тензора $\mathbf{Z}$ относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}$ определяется по формуле (31), которая теперь записывается в виде

$$\widetilde{\overline{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\phi}_i \widetilde{\mathbf{p}}_i, \qquad \overline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\phi}_i \mathbf{p}_i. \tag{35}$$

Другие способы представления ортонормированного тензора основываются на существовании соответствия между группой вращений (ортонормированных тензоров) и векторным пространством $\mathcal{E}$ [4]. Это соответствие становится взаимно-однозначным, если считать, что определены векторы бесконечной длины и что вектор бесконечной длины, параллельный заданному направлению, единственный. Тогда каждому вектору $\mathbf{c}$ сопоставляется ортонормированный тензор

$$\mathbf{Z} = \mathbf{E}_2 + \frac{2}{1 + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}}(\widetilde{\mathbf{c}} + \widetilde{\mathbf{c}} \cdot \widetilde{\mathbf{c}}). \tag{36}$$

Наоборот, если $\mathbf{Z}$ — ортонормированный тензор, то существует единственный вектор $\mathbf{c}$, удовлетворяющий соотношению (36). Вектор $\mathbf{c}$ можно найти из равенства

$$\widetilde{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}}{1 + \mathbf{E}_2 \underset{2}{\wedge} \mathbf{Z}}. \tag{37}$$

Он называется вектор-параметром вращения, определенного тензором $\mathbf{Z}$. Направление вектора $\mathbf{c}$ задает ось поворота, а его длина $\gamma = |\mathbf{c}|$ равняется тангенсу половинного угла χ поворота, т. е.

$$|\mathbf{c}| = \gamma = \operatorname{tg}\frac{\chi}{2}. \tag{38}$$

Из равенств (36) и (37) следует, что если $\mathbf{c} = \mathbf{O}$, то $\mathbf{Z} = \mathbf{E}_2$, а если $\chi = \pi$, то длина вектор-параметра $\mathbf{c}$ обращается в бесконечность.

Допустим, что вектор $\mathbf{c}$ в равенстве (36) является функцией времени. Нетрудно проверить, что производная $\dot{\mathbf{Z}}$ определяется равенством

$$\dot{\mathbf{Z}} = \frac{2}{1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}(\dot{\tilde{\mathbf{c}}} + \dot{\tilde{\mathbf{c}}}\cdot\tilde{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{c}}}) - \frac{4}{(1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})^2}(\tilde{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}\cdot\tilde{\mathbf{c}}).$$

Умножая справа на тензор $\mathbf{Z}^{\mathbf{T}} = \frac{2}{1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}(-\tilde{\mathbf{c}}+\tilde{\mathbf{c}}\cdot\tilde{\mathbf{c}})$, после преобразований находим вражение для тензора $\tilde{\overline{\omega}} = \dot{\mathbf{Z}}\cdot\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}$:

$$\tilde{\overline{\omega}} = \frac{2}{1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}(\dot{\tilde{\mathbf{c}}} + \tilde{\tilde{\mathbf{c}}}\cdot\dot{\mathbf{c}}),$$

откуда получаем, что абсолютная угловая скорость тензора вычисляется по формуле

$$\overline{\omega} = \frac{2}{1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}(\dot{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}\cdot\dot{\mathbf{c}}) = \frac{2}{1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}(\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{c}\times\dot{\mathbf{c}}).$$

Если положить $\mathbf{q} = \frac{}{c}|\mathbf{c}|$, тензор $\mathbf{Z}$ можно записать в виде

$$\mathbf{Z} = \mathbf{E}_2 + (1-\cos\chi)\tilde{\mathbf{q}}\cdot\tilde{\mathbf{q}} + \sin\chi\tilde{\mathbf{q}}, \tag{39}$$

где угол χ определяется равенством (38).

Таким образом тензор $\mathbf{Z}$ представляется в виде функции двух величин — единичного вектора $\mathbf{q}$ и скалярной величины χ. Эти величины являются параметрами Эйлера для данного тензора $\mathbf{Z}$. Легко получить выражение

$$\overline{\omega} = [(1-\cos\chi)\tilde{\mathbf{q}} + \sin\chi\mathbf{E}_2]\cdot\dot{\mathbf{q}} + \dot{\chi}\mathbf{q}, \tag{40}$$

откуда следуют соотношения

$$\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{q}}} = (1-\cos\chi)\tilde{\mathbf{q}} + \sin\chi\mathbf{E}_2, \qquad \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\chi}} = \mathbf{q}.$$

Отметим, что заданные формулами (36) и (39) способы параметризации тензора $\mathbf{Z}$ не связанны с выбором какого-либо базиса в пространстве $\mathcal{E}$. Если такой базис выбран, то вектор $\mathbf{c}$ выражается своими координатами c_1, c_2, c_3, а единичный вектор $\mathbf{q}$ — двумя независимыми скалярными величинами q_1, q_2. В таком случае ортонормированный тензор, определенный формулами (36) или (39), выражается посредством скалярных параметров c_1, c_2, c_3 или q_1, q_2 и χ соответственно.

Очень часто в механике приходится иметь дело с ортонормированными тензорами вида

$$\mathbf{Z} = \mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3'\mathbf{e}_3, \tag{41}$$

где $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathrm{T}}$ и $\underline{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)^{\mathrm{T}}$ — ортонормированные базисы. Тензор (41) определяет вращение, приводящее базис $\underline{e}$ в базис $\underline{e}'$. Вектор-параметр $\mathbf{c}$ для тензора (41) получаем из формулы (37):

$$\widetilde{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3 - (\mathbf{e}_1\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}'_3)}{1 + \mathbf{E}_2 \underset{2}{\bigwedge}(\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3)}.$$

Поскольку $\mathbf{E}_2 \underset{2}{\bigwedge} \left(\sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}'_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}'_i\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i\mathbf{e}'_i = \widetilde{\widetilde{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}'_i} = \widetilde{\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}'_i}$, то

$$\mathbf{c} = \frac{\widetilde{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}'_1} + \widetilde{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}'_2} + \widetilde{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}'_3}}{1 + \sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_j},$$

откуда следует равенство

$$\mathbf{c} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}'_i}{1 + \sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_j}.$$

Рассмотрим другие способы параметризации тензора (41).

Известно, что базис $\underline{e}$ можно привести в базис $\underline{e}'$ с помощью трех последовательных вращений вокруг соответствующих осей. Если ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 — углы этих вращений, то тензор $\mathbf{Z}$ выражается ими, векторы, определенные равенством (34), являются единичными, а формулой (35) определяется угловая скорость $\overline{\omega}$ базиса $\underline{e}'$ относительно базиса $\underline{e}$. В зависимости от выбора осей вращений получим углы Эйлера, углы Крылова или углы Брайнта.

Укажем теперь способ параметризации тензора $\mathbf{Z}$ посредством одной векторной и одной скалярной величины.

Пусть $\mathbf{a}$ — постянный вектор в базисе $\underline{e}$. Будем предполагать, что базис $\mathbf{e}'$ вращается таким образом, что вектор $\mathbf{e}'_3$ остается все время неколлинеарным вектору $\mathbf{a}$, т. е. $\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3 \neq \mathbf{O}$. Вектор

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3|}$$

находится в плоскости, определенной векторами $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$. Обозначим через ϕ угол между векторами $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{p}$ с положительным направлением отсчета, определенным вектором $\mathbf{e}'_3$. Можно записать соотношения

$$\mathbf{e}'_1 = \cos\phi \mathbf{p} + \sin\phi \mathbf{e}'_3 \times \mathbf{p}.$$

$$\mathbf{e}'_2 = -\sin\phi \mathbf{p} + \cos\phi \mathbf{e}'_3 \times \mathbf{p}, \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_3.$$

Таким образом получаем, что положение базиса $\underline{e}'$ относительно базиса $\underline{e}$ определено, если известны положение единичного вектора $\mathbf{e}_3'$ и скалярная величина ϕ. Действительно, вектором $\mathbf{e}_3'$ определяются вектор $\mathbf{p}$ и промежуточный базис $\mathbf{e}_1'' = \mathbf{p}$, $\mathbf{e}_2'' = \mathbf{e}_3' \times \mathbf{p}$, $\mathbf{e}_3'' = \mathbf{e}_3'$, а угол ϕ определяет вращение вокруг оси $\mathbf{e}_3'$, которое приводит базис $\underline{e}$ в базис $\underline{e}'$.

Используя формулу (39), можно представить векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ в виде $\mathbf{e}_i' = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{e}_i''$, где

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{E}_2 + (1 - \cos\phi)\widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \widetilde{\mathbf{e}}_3' + \sin\phi \widetilde{\mathbf{e}}_3'.$$

Вводя тензор $\mathbf{Z} = \mathbf{e}_1''\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2''\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3''\mathbf{e}_3$, записываем также соотношения

$$\mathbf{Z} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{Z}'', \quad \overline{\omega}' = \overline{\Omega} + \overline{\omega}'',$$

в которых $\overline{\omega}'$ и $\overline{\omega}''$ — угловые скорости базисов $\underline{e}'$ и $\underline{e}''$ относительно базиса $\underline{e}$, а $\overline{\Omega}$ — относительная угловая скорость тензора $\mathbf{\Phi}$ по отношению к базису $\mathbf{e}''$. Из формулы (40) следует, что $\overline{\Omega} = \dot{\phi}\mathbf{e}_3'$. Для вычисления угловой скорости

$$\overline{\omega}'' = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1'' \times \dot{\mathbf{e}}_1'' + \mathbf{e}_2'' \times \dot{\mathbf{e}}_2'' + \mathbf{e}_3'' \times \dot{\mathbf{e}}_3'')$$

производим следующие преобразования:

$$\left(\frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\right)^{\bullet} = \left(\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3')^2}}\right)^{\bullet} = -\frac{1}{2\left[\sqrt{(\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3')^2}\right]^3}[(\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3')^2]^{\bullet} = \frac{\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_3'}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|^2};$$

$$\dot{\mathbf{e}}_1'' = \dot{\mathbf{p}} = \left(\frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\right)^{\bullet} \mathbf{a} \times \mathbf{e}_3' + \frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3' = \frac{-\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{a}\mathbf{p}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|} \cdot \mathbf{e}_3';$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2'' = (\widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{p})^{\bullet} = -\widetilde{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{e}}_3'' \cdot + \widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \dot{\mathbf{p}};$$

$$\omega'' = \frac{1}{2}[\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \widetilde{\widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{p}} \cdot (\widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{p})^{\bullet} + \widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \dot{\mathbf{e}}_3']$$

$$= \frac{1}{2}[\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{p}\mathbf{e}_3' - \mathbf{e}_3'\mathbf{p}) \cdot (-\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' + \widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \dot{\mathbf{p}}) + \widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{e}_3']$$

$$= \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\mathbf{e}_3' \cdot \widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' - \mathbf{e}_3'\mathbf{p} \cdot \widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \dot{\mathbf{p}}) + \widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \dot{\mathbf{e}}_3').$$

Имеет место равенство

$$\widetilde{\mathbf{e}}_3' = \widetilde{\mathbf{p}} \cdot (\widetilde{\widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{p}}) = \widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{p}\mathbf{p} - \mathbf{p}\widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{p},$$

откуда следует, что

$$-\mathbf{p}\mathbf{e}_3' \cdot \widetilde{\mathbf{p}} = -\mathbf{p}\widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{p} = \widetilde{\mathbf{e}}_3' - \widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{p}\mathbf{p}.$$

Поставляя последнее равенство в выражение для угловой скорости $\overline{\omega}''$, получаем

$$\overline{\omega}'' = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{p}\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' + \mathbf{e}_3'\mathbf{e}_3' \cdot \widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + 2\widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \dot{\mathbf{e}}_3').$$

Так как

$$\widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{p}\ \ \mathbf{p}\mathbf{e}_3' = \frac{\mathbf{e}_3' \times (\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3')}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' = \frac{\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3')\mathbf{e}_3'}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3',$$

$$\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{-\widetilde{\mathbf{p}}\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{a}\mathbf{p}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' = \frac{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{p}\mathbf{p}) \cdot \mathbf{a}\mathbf{p}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' = \frac{\mathbf{a}\mathbf{p}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3',$$

то можно записать, что

$$\overline{\omega}'' = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_3'\mathbf{e}_3') \cdot \frac{\mathbf{a}\mathbf{p}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' - \frac{\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3')\mathbf{e}_3'}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3'\right] + \widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{e}_3'$$

$$= \left[\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3'}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\mathbf{e}_3'\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{e}}_3'\right] \cdot \dot{\mathbf{e}}_3'.$$

Отсюда следует, что угловая скорость ω' определяется равенством

$$\overline{\omega}' = \dot{\phi}\mathbf{e}_3' + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3', \tag{42}$$

где $\mathbf{A} = \dfrac{\partial \overline{\omega}'}{\partial \dot{\mathbf{e}}_3'} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3'}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\mathbf{e}_3'\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{e}}_3'$.

Подходящим выбором вектора **a** и скалярных величин, определяющих вектор **p**, можно получить известные параметризации тензора (41) в углах Эйлера, углах Крылова или углах Брайнта. Например, если выбрать $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3$, ψ — угол между векторами **p** и $\mathbf{e}_1$, θ — угол между векторами **a** и $\mathbf{e}_3'$, и ϕ — угол между векторами **p** и $\mathbf{e}_1'$ с положительными направлениями отсчета, определенными соответственно векторами **a**, **p** и $\mathbf{e}_3'$, то нетрудно увидеть, что скалярные параметры ψ, θ и ϕ являются углами Эйлера для базиса $\underline{\mathbf{e}}'$. Углы Брайнта и Крылова можно получит, если в качестве вектора **a** выбрать соответственно векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

Указанное представление тензора (41) является наиболее удобным, когда в конкретной задаче выделены направления **a** и $\mathbf{e}_3'$, имеющие механическое или геометрическое значение.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим голономную систему $\mathfrak{M}$, положение точек которой определяется скалярными параметрами $q_1, \ldots, q_m$, единичными векторами $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и ортонормированными тензорами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$. Каждый единичны вектор $\mathbf{e}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ определяется двумя независимыми скалярными параметрами, а каждый тензор Γ_k $(k = 1, \ldots, p)$ — тремя. В дальнейшем будем предполагать, что все эти скалярные параметры вместе с параметрами q_i $(i = 1, \dots, m)$ являются независимыми также между собой. В этом случае их общее число $m + 2n + 3p$ есть число степеней свободы системы. Величины q_i, $\mathbf{e}_j$, Γ_k будем называть тензорными обобщенными координатами системы нулевой, первой и второй валентности соответственно. Тензорные обобщенные координаты будем обозначать через $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, \dots, m + n + p)$, а их валентность — через ν_i.

Уравнения движения системы выведем из принципа Журдена, согласно которому действительное движение системы является тем кинематически возможным движением, для которого при $\delta\mathbf{r} = \mathbf{0}$

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} (d\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}dm) \cdot \delta\dot{\mathbf{r}} = 0 \tag{43}$$

в любой момент времени t. Здесь $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, q_i, \mathbf{e}_j, \Gamma_k)$ — радиус-вектор элемента dm в инерциальном пространстве, $\delta\mathbf{r}$ — виртуальное перемещение, $\delta\dot{\mathbf{r}}$ — виртуальное изменение скорости $\dot{\mathbf{r}}$, $d\mathbf{f}$ — результирующая сил, действующих на элемент dm и совершающих виртуальную работу.

Применяя формулу (15) при фиксированном времени, для вариации $\delta\dot{\mathbf{r}}$ функции $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t, q_i, \mathbf{e}_j, \Gamma_k, \dot{q}_i, \dot{\mathbf{e}}_j, \dot{\Gamma}_k)$ получаем

$$\delta\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{e}_j} \cdot \delta\mathbf{e}_j + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial \Gamma_k} \bigwedge_2 \delta\Gamma_k$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{e}}_j} \cdot \delta\dot{\mathbf{e}}_j + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\Gamma}_k} \bigwedge_2 \delta\dot{\Gamma}_k.$$

Из условия $\delta\mathbf{r} = \mathbf{0}$ и независимости тензорных обобщенных координат следует, что $\delta q_i = 0$, $\delta\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$, $\delta\Gamma_k = \mathbf{O}_2$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, p)$. Так как для каждого единичного вектора выполнено равенство $\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_j = 0$, то $\delta\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_j = 0$. Отсюда, в соответствии с формулой (7), получаем, что каждую из вариаций $\delta\dot{\mathbf{e}}_j$ можно записать в виде

$$\delta\dot{\mathbf{e}}_j = -\widetilde{\mathbf{e}}_j \cdot \delta\overline{\pi}_j = \delta\overline{\pi} \cdot \widetilde{\mathbf{e}}_j \quad (j = 1, \dots, n),$$

где $\delta\pi_j$ — произвольный бесконечно малый вектор.

Аналогично, из равенств $\Gamma_k \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_2$ и $\dot{\Gamma} \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}} + \Gamma_k \cdot \dot{\Gamma}_k^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}_2$ $(k = 1, \dots, p)$ вытекает, что между тензором Γ_k и вариацией $\delta\dot{\Gamma}_k$ имеется зависимость

$$\delta\dot{\Gamma}_k \cdot \Gamma_k + \Gamma_k \cdot \delta\dot{\Gamma}_k = \mathbf{O}_k.$$

Учитывая, что $\delta\dot{\Gamma}_k^{\mathrm{T}} = (\delta\dot{\Gamma}_k)^{\mathrm{T}}$, получаем $\delta\dot{\Gamma}_k \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}} = -\Gamma_k \cdot (\delta\dot{\Gamma}_k)^{\mathrm{T}} = (\delta\dot{\Gamma}_k \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}})$, т. е. $(\delta\dot{\Gamma}_k \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}})$ — кососимметрический тензор и таким образом существует вектор $\delta\overline{\kappa}_k$, для которого выполнено равенство $\delta\dot{\Gamma}_k \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}} = \delta\overline{\kappa}_k$, откуда находим, что

$$\delta\Gamma_k = \delta\widetilde{\overline{\kappa}}_k \cdot \Gamma_k = \delta\overline{\kappa}_k \cdot \widetilde{\Gamma}_k \quad (k = 1, \dots, p).$$

Если примем во внимание свойства (3) и (2) обобщенного произведения, найдем, что

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{e}}_j}\cdot\delta\dot{\mathbf{e}}_j=\delta\dot{\mathbf{e}}_j\cdot{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{e}}_j}=\delta\overline{\pi}_j\cdot\left(\widetilde{\mathbf{e}}_j\cdot{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{e}}_j}\right),$$

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\Gamma}_k}\bigwedge_2\delta\dot{\Gamma}_k=\delta\dot{\Gamma}_k\bigwedge_2{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\Gamma}_k}=\delta\overline{\kappa_k}\cdot\left(\widetilde{\Gamma}_k\bigwedge_2{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\Gamma}_k}\right),$$

$$\delta\mathbf{r}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i+\sum_{j=1}^{m}\delta\overline{\pi}_j\cdot\left(\widetilde{\mathbf{e}}_j\cdot{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{e}}_j}\right)+\sum_{k=1}^{p}\delta\overline{\kappa}_k\cdot\left(\widetilde{\Gamma}_k\bigwedge_2{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\Gamma}_k}\right).$$

После подстановки последнего выражения в (43) получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\delta q_i\int_{\mathfrak{M}}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{q}_i}\cdot(d\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{r}}dm)+\sum_{j=1}^{n}\delta\overline{\pi}_j\cdot\widetilde{\mathbf{e}}_j\cdot\int_{\mathfrak{M}}{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{e}}_j}\cdot(d\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{r}}dm)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\delta\overline{\kappa}_k\cdot\widetilde{\Gamma}_k\bigwedge_2\int_{\mathfrak{M}}{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\Gamma}_k}\cdot(d\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{r}}dm)=0.$$

Из независимости вариации δq_i и векторов $\delta\overline{\pi}_j$ и $\delta\overline{\kappa}_k$ следует, что это равенство эквивалентно условиям

$$\int_{\mathfrak{M}}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{q}_i}\cdot(d\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{r}}dm)=0\quad(i=1,\ldots,m);$$

$$\widetilde{\mathbf{e}}_j\cdot\int_{\mathfrak{M}}{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{e}}_j}\cdot(d\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{r}}dm)=\mathbf{0}\quad(j=1,\ldots,n);$$

$$\widetilde{\Gamma}_k\bigwedge_2\int_{\mathfrak{M}}{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\Gamma}_k}\cdot(d\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{r}}dm)=\mathbf{0}\quad(k=1,\ldots,p).$$

Все равенства записываются одним и тем же способом, если для тензора нулевой валентности q_i положим $\widetilde{q}_i=1$.

$$\widetilde{\mathbf{X}}_i\bigwedge_{\nu_i}\int_{\mathfrak{M}}{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}\cdot(d\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{r}}dm)=\widetilde{\mathbf{X}}_i\bigwedge_{\nu_i}\mathbf{O}_{\nu_i}\quad(i=1,\ldots,m+n+p).$$

В зависимости от валентности ν_i тензора $\mathbf{X}_i$ тензор $\mathbf{X}_i\bigwedge\limits_{\nu_i}\mathbf{O}_{\nu_i}$ является нулевым элементом пространства $\mathcal{E}_0$, если $\nu_i=0$, или пространства $\mathcal{E}_1$, если $\nu_i=1$ или $\nu_i=2$. Это выражается равенством

$$\mathbf{X}_i\bigwedge_{\nu_i}\mathbf{O}_{\nu_i}=\mathbf{O}_{\frac{1}{2}(3\nu_i+\nu_i^2)}\quad(i=1,\ldots,m+n+p).$$

Рассмотрим произведение ${}^{[1]}\dfrac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{r}}$. Используя правило (11), вычисляем производную

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^2}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = {}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

откуда после дифференцирования относительно t получаем

$${}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^2}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}\right) - \left(\frac{d}{dt}{}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}\right) \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Из равенства $\dot{\mathbf{r}} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m+n+p} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}_i} \bigwedge_{\nu_i} \dot{\mathbf{X}}_i$ следует, что

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}_i} \bigwedge_{\nu_i} \mathbf{E}_{2\nu_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}_i}.$$

После применения правила (16) изменения порядка дифференцирования, находим

$$\left(\frac{d}{dt}{}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}\right) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{d}{dt}{}^{[1]}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}_i}\right) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{X}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^2}{\partial \mathbf{X}_i}.$$

Таким образом имеет место равенство

$${}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^2}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^2}{\partial \mathbf{X}_i},$$

из которого следует

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} {}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{r}}\,dm = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}_i} \quad (i = 1, \ldots, m+n+p),$$

где $T = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{\mathfrak{M}} \dot{\mathbf{r}}^2 dm$ — кинетическая энергия системы.

Так как кинетическая энергия системы является скалярной величиной, то ее производные $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}$ и $\dfrac{\partial T}{\partial \mathbf{X}_i}$ имеют валентность тензора $\mathbf{X}_i$.

Тензор $\mathbf{Q}_i \in \mathcal{E}_{\nu_i}$, определенный равенством

$$\mathbf{Q}_i = \int\limits_{\mathfrak{M}} {}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot d\mathbf{f} = \int\limits_{\mathfrak{M}} {}^{[1]}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}_i} \cdot d\mathbf{f} \quad (i = 1, \ldots, m+n+p),$$

будем называть тензорной обобщенной силой, соответствующей тензорной обобщенной координате $\mathbf{X}_i \in \mathcal{E}_{\nu_i}$.

В этих обозначениях уравнвния движения принимают вид

$$\widetilde{\mathbf{X}}_i \bigwedge_{\nu_i} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}_i} - \mathbf{Q}_i\right] = \mathbf{O}_{\frac{1}{2}(3\nu_i - \nu_i^2)} \quad (i = 1, \ldots, m+n+p). \tag{44}$$

Уравнения (44) естественно назвать тензорными обобщенными уравнениями Лагранжа второго рода. Они совпадают с классическими уравнениями Лагранжа второго рода, если переменные $\mathbf{X}_i$ — скалярные величины. Если валентность тензора $\mathbf{X}_i$ равна единице, т. е. если $\mathbf{X}_i$ является единичным вектором $\mathbf{e}_i$, то выражение $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \dfrac{\partial T}{\partial \mathbf{X}_i} - \mathbf{Q}_i$ тоже вектор и его произведение на тензор $\widetilde{\mathbf{e}}_i$ представляет векторное умножение $\mathbf{e}_i \times \left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \dfrac{\partial T}{\partial \mathbf{X}_i} - \mathbf{Q}_i\right)$. Это означает, что уравнение (44) эквивалентно двум скалярным уравнениям, так как оно выражает равенство между векторами, расположенными в одной плоскости, нормальным вектором которой является вектор $\mathbf{e}_i$. Если $\mathbf{X}_i \in \mathcal{E}_2$, то после умножения $\bigwedge_2$ в равенстве (44) получаем вектор. Таким образом число скалярных уравнений, соответствующих тензору $\mathbf{X}_i$, равняется трем.

Если существует функция $\Pi = \Pi(t, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{m+n+p})$, для которой

$$\mathbf{Q}_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}_i} \quad (i = 1, \ldots, m+n+p),$$

то уравнения (44) приобретают вид

$$\mathbf{X}_i \bigwedge_{\nu_i} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}_i}\right] = \mathbf{O}_{\frac{1}{2}(3\nu_i - \nu_i^2)}, \tag{45}$$

где $L = T - \Pi$ следует назвать функцией Лагранжа для тензорных уравнений Лагранжа.

В качестве примера рассмотрим движение абсолютно твердого тела S под действием заданных сил. Пусть O — фиксированная точка в инерциальном пространстве, а точка C — центр массы тела. Для тензорных обобщенных координат тела выбираем длину γ вектора $\mathbf{r}_c = \overline{OC}$, единичный вектор $\mathbf{c} = \dfrac{\mathbf{r}_c}{|\mathbf{r}_c|}$ и ортонормированный тензор $\mathbf{Z}$, определяющий вращательное движение тела. Посредством этих величин радиус-вектор $\mathbf{r}$ производной точки M тела выражается равенством

$$\mathbf{r} = \gamma \mathbf{c} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} = \text{const}.$$

Если m и $\mathbf{J}_c$ — масса и тензор инерции тела и $\overline{\omega}$ — его абсолютная угловая скорость, то кинетическая энергия тела имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_c^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega} \cdot \mathbf{J}_c \cdot \overline{\omega} = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}^2 + \gamma^2 \dot{\mathbf{c}}^2) + \frac{1}{2} \overline{\omega} \cdot \mathbf{J}_c \cdot \overline{\omega}, \tag{46}$$

где $\dot{\mathbf{r}}_c = \dot\gamma\mathbf{c} + \gamma\dot{\mathbf{c}}$ — абсолютная скорость центра массы тела. Легко получить, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\gamma} - \frac{\partial T}{\partial\gamma} = m(\ddot\gamma - \gamma\dot{\mathbf{c}}^2);$$

$$\widetilde{\mathbf{c}}\cdot\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{c}}} - \frac{\partial T}{\partial\mathbf{c}}\right] = \widetilde{\mathbf{c}}\cdot(2\gamma\dot\gamma\dot{\mathbf{c}} + \gamma^2\ddot{\mathbf{c}})m = m\mathbf{c}\times(2\gamma\dot\gamma\dot{\mathbf{c}} + \gamma^2\ddot{\mathbf{c}});$$

$$\int\limits_S \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot\gamma}\cdot d\mathbf{f} = \mathbf{c}\cdot\int\limits_S d\mathbf{f} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{f};$$

$$\widetilde{\mathbf{c}}\cdot\int\limits_S\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{c}}}\right)^{\mathbf{T}}\cdot d\mathbf{f} = \widetilde{\mathbf{c}}\cdot\gamma\mathbf{E}_2\cdot\int\limits_S d\mathbf{f} = \gamma\mathbf{c}\times\mathbf{f},$$

где $\mathbf{f} = \int\limits_S d\mathbf{f}$ — главный вектор всех сил, действующих на тело. Таким образом две из уравнений движения тела, которые соответствуют скалярной и векторной координате γ и $\mathbf{c}$, имеют вид

$$\begin{gathered} m(\ddot\gamma - \gamma\dot{\mathbf{c}}^2) - \mathbf{c}\cdot\mathbf{f} = 0,\\ \gamma\mathbf{c}\times[m(2\dot\gamma\cdot\dot{\mathbf{c}} + \gamma\ddot{\mathbf{c}}) - \mathbf{f}] = 0. \end{gathered} \tag{47}$$

Используя равенство $\mathbf{c}\cdot\ddot{\mathbf{c}} = -\dot{\mathbf{c}}^2$, вытекающее из условия $\mathbf{c}^2 = 1$, получаем, что

$$\begin{gathered} m(\ddot\gamma - \gamma\dot{\mathbf{c}}^2) - \mathbf{c}\cdot\mathbf{f} = (m\ddot{\mathbf{r}}_c - \mathbf{f})\cdot\mathbf{c},\\ \mathbf{c}\times[(2\dot\gamma\dot{\mathbf{c}} + \gamma\ddot{\mathbf{c}})m - \mathbf{f}] = \mathbf{c}\times(\ddot{\mathbf{r}}_c m - \mathbf{f}). \end{gathered}$$

Таким образом левые стороны уравнений (47) являются скалярным и векторным произведением векторов $\mathbf{c}$ и $m\ddot{\mathbf{r}}_c - \mathbf{f} = m(\ddot\gamma\mathbf{c} + 2\dot\gamma\dot{\mathbf{c}} + \gamma\ddot{\mathbf{c}}) - \mathbf{f}$. Из первого уравнения следует, что вектор $(m\ddot{\mathbf{r}}_c - \mathbf{f})$ перпендикулярен вектору $\mathbf{c}$, а из второго — что он коллинеарен вектору $\mathbf{c}$, откуда заключаем, что он нулевой. Наоборот, если $m\ddot{\mathbf{r}}_c - \mathbf{f} = \mathbf{0}$, то, очевидно, равенство (47) выполняются. Следовательно, уравнения (47) описывают движение центра массы тела.

Получим теперь уравнение, соответствующее тензорной обобщенной координате $\mathbf{Z}$. Из формулы (27) и (46) следует, что

$$\widetilde{\mathbf{Z}}\bigwedge_2\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial T}{\partial\mathbf{Z}}\right)$$

$$= \widetilde{\mathbf{Z}}\bigwedge_2\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\overline{\omega}}\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{Z}}} + \frac{\partial T}{\partial\overline{\omega}}\cdot\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\mathbf{Z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\mathbf{J}_c}\bigwedge_2\frac{\partial\mathbf{J}_c}{\partial\mathbf{Z}}\right]$$

$$= \left(\widetilde{\mathbf{Z}}\bigwedge_2^{[1]}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{Z}}}\right)\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\overline{\omega}} + \widetilde{\mathbf{Z}}\bigwedge_2^{[1]}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\mathbf{Z}}\right)\cdot\frac{\partial T}{\partial\overline{\omega}} - \left(\widetilde{\mathbf{Z}}\bigwedge_2^{[2]}\frac{\partial\mathbf{J}_c}{\partial\mathbf{Z}}\right)\bigwedge_2\frac{\partial T}{\partial\mathbf{J}_c}.$$

В последнем выражении использованы правила (3) и (1).

Справедливы также соотношения

$$\tilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 {}^{[1]} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{E}_2; \tag{48}$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 {}^{[2]} \frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \mathbf{Z}} = 2\mathbf{J}_c; \tag{49}$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 {}^{[1]} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{Z}} \right) = -\tilde{\overline{\omega}}. \tag{50}$$

Эти соотношения получаются из формул (33), (6) и (29) следующим образом

$$\tilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 {}^{[1]} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} = \tilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 {}^{[1]} \left[\frac{1}{2}^{[1]} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}) \right] = -\frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}) \bigwedge_2 (\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z})^{[1]}$$

$$= -\frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}) \bigwedge_2 (\mathbf{Z}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}) = -\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}) \bigwedge_2 \mathbf{D} = -\frac{1}{2} \mathbf{D} \bigwedge_2 \mathbf{D} = \mathbf{E}_2,$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 {}^{[2]} \frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 {}^{[2]} \left(2^{[1]} \tilde{\mathbf{J}}_c \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} \right) = \tilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 \left(2^{[1]} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_c \right)$$

$$= 2 \left(\tilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 {}^{[1]} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} \right) \cdot \mathbf{J}_c = 2\tilde{\mathbf{J}}_c.$$

Применяя равенство

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{Z}} = {}^{[1]}(\mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{Z}}), \tag{51}$$

получаем

$$\tilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 {}^{[1]} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{Z}} \right) = \tilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 {}^{[2]} (\mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{Z}}) = -(\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}) \bigwedge_2 (\mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{Z}})^{[1]}$$

$$= -(\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}) \bigwedge_2 (\dot{\mathbf{Z}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}) = -[\mathbf{D} \cdot (\mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{Z}}^{\mathrm{T}})] \bigwedge_2 \mathbf{D} = (\mathbf{D} \cdot \tilde{\overline{\omega}}) \bigwedge_2 \mathbf{D}.$$

Последнее произведение можно представить в виде

$$(\mathbf{D} \cdot \tilde{\overline{\omega}}) \bigwedge_2 \mathbf{D} =^{[1]} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \bigwedge_2 \tilde{\overline{\omega}}.$$

Так как, согласно (5), ${}^{[1]}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}) = {}^{[1]}(\mathbf{E}_4^* - \mathbf{E}_4) = \mathbf{E}_4^* - \mathbf{E}_2\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_4^* \underset{2}{\bigwedge} \tilde{\overline{\omega}} = \tilde{\overline{\omega}}^{\mathrm{T}} = -\tilde{\overline{\omega}}$, $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_2 \underset{2}{\bigwedge} \tilde{\overline{\omega}} = \mathbf{E}_2 \mathrm{sp}\tilde{\overline{\omega}} = \mathbf{O}_2$, то

$$(\mathbf{D}\cdot\tilde{\overline{\omega}}) \underset{2}{\bigwedge} \mathbf{D} = -\tilde{\overline{\omega}}. \tag{52}$$

Используя формулы (48), (49) и (50), получаем соотношение

$$\mathbf{Z} \underset{2}{\bigwedge} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{Z}}\right] = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \overline{\omega}} - \tilde{\overline{\omega}}\cdot\frac{\partial T}{\partial \overline{\omega}} - 2\tilde{\mathbf{J}}_c \underset{2}{\bigwedge} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{J}_c}.$$

Наконец, вычисляя производные

$$\frac{\partial T}{\partial \overline{\omega}} = \mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \overline{\omega}} = (\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega})^{\cdot}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{J}_c} = \frac{1}{2}\overline{\omega}\overline{\omega}$$

и произведение

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mathbf{J}}_c \underset{2}{\bigwedge} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{J}_c} &= -(\mathbf{D}\cdot\mathbf{J}_c) \underset{2}{\bigwedge} \overline{\omega}\overline{\omega} = -[\mathbf{D}\cdot(\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega})]\cdot\overline{\omega} \\ &= -\overline{\omega}\cdot{}^{[1]}[\mathbf{D}\cdot(\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega})] = (\overline{\omega}\cdot\mathbf{D})\cdot(\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega}) = -\tilde{\overline{\omega}}\cdot(\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega}), \end{aligned} \tag{53}$$

находим, что имеет место равенство

$$\tilde{\mathbf{Z}} \underset{2}{\bigwedge} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{Z}}\right) = (\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega})^{\cdot}.$$

Для тензорной обобщенной силы, соответствующей тензорной обобщенной координате $\mathbf{Z}$, имея в виду формулу (28), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}} \underset{2}{\bigwedge} \int\limits_S {}^{[1]}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{Z}}\cdot d\mathbf{f} &= \mathbf{Z} \underset{2}{\bigwedge} \int\limits_S {}^{[1]}\left(-\tilde{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}}\right)\cdot d\mathbf{f} \\ &= \tilde{\mathbf{Z}} \underset{2}{\bigwedge} {}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}}\cdot\int\limits_S \tilde{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{f} = \mathbf{E}_2\cdot\int\limits_S \mathbf{r}\times d\mathbf{f} = \boldsymbol{M}, \end{aligned}$$

где через $\boldsymbol{M}$ обозначен главный момент сил, приложенных к телу относительно его центра массы.

Таким образом мы получили, что движение тела определяется уравнениями (47) и уравнением

$$(\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega})^{\cdot} = \boldsymbol{M}, \tag{54}$$

при этом уравнения (47) задают движение центра массы тела, а уравнение (54), которое выражает теорему о кинематическом моменте, —вращательное движение тела.

Отметим, что произведение $\frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega}$ можно было бы выразить при помощи формул (18) и (27) в виде

$$\frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega}=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{Z}}\bigwedge_2(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Z})\cdot\mathbf{J}_0\cdot(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Z})\bigwedge_2\dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{T}}.$$

В этом случае, однако, вычисление частных производных становится более сложным. С таким же трудностями сталкиваемся, если тензор $\mathbf{Z}$ не является обобщенной кооринатой, а выражается некоторым образом через другие тензорные обобщенные координаты. Более громоздким будут выражения также в случае нескольких тел, если выбранные тензорные обобщенные координаты определяют относительные движения тел. Поэтому естественно, учитывая рассмотренный пример, попытаться выразить левые части $\widetilde{\mathbf{X}}_i\bigwedge_{\nu_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}-\frac{\partial T}{\partial\mathbf{X}_i}\right)$ посредством производных кинетической энергии относительно абсолютных угловых скоростей.

Рассмотрим систему n абсолютно твердых тел, для которой выбраны тензорные обобщенные координаты $\mathbf{X}_i$ $(i=1,\ldots,N)$, удовлетворяющие уравнениям связей. Пусть угловые положения тел относительно инерциального пространство определяются ортонормированными тензорами $\mathbf{Z}_l$ $(l=1,\ldots,n)$.

Предположим, что задана некоторая дважды дифференцируемая функция $g(t,\mathbf{X}_i,\dot{\mathbf{X}}_i,\mathbf{Z}_l,\dot{\mathbf{Z}}_l)$. Из равенства (18) следует, что

$$\dot{\mathbf{Z}}_l=\widetilde{\overline{\omega}}_l\cdot\mathbf{Z}_l, \tag{55}$$

где $\overline{\omega_l}$ — абсолютная угловая скорость тела номер $l(l=1,\ldots,n)$. Подставляя производные $\dot{\mathbf{Z}}_l$, получаем функцию $\widehat{g}$ переменных t, $\mathbf{X}_i$, $\dot{\mathbf{X}}_i$, $\mathbf{Z}_l$ и $\overline{\omega_l}$ $(i=1,\ldots,N,\ l=1,\ldots,n)$, т. е.

$$\widehat{g}(t,\mathbf{X}_i,\dot{\mathbf{X}}_i,\mathbf{Z}_l,\overline{\omega_l})=g(t,\mathbf{X}_i,\dot{\mathbf{X}}_i,\mathbf{Z}_l,\dot{\mathbf{Z}}_l).$$

Так как связи системы — голономные, можно считать, что тензоры $\mathbf{Z}_l$ зависят от переменных $\mathbf{X}_i$, а тензоры $\dot{\mathbf{Z}}_l$ и векторы $\overline{\omega}_l$ — от тензоров $\mathbf{X}_i$ и их производных $\dot{\mathbf{X}}_i$. Пусть $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)\in\mathcal{E}_\nu$ — одна из тензорных обобщенных координат $\mathbf{X}_i$. Покажем, что имеет место равенство

$$\widetilde{\mathbf{X}}\bigwedge_\nu\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial\dot{\mathbf{X}}}-\frac{\partial g}{\partial\mathbf{X}}\right]=\widetilde{\mathbf{X}}\bigwedge_\nu\sum_{l=1}^{n}{}^{[1]}\frac{\partial\overline{\omega_l}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\cdot\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\overline{\omega_l}}-\widetilde{\overline{\omega}}\cdot\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\overline{\omega}_l}\right]$$
$$+\mathbf{X}\bigwedge_\nu\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}-\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\mathbf{X}}\right]. \tag{56}$$

Пользуясь теоремой о дифференцировании составных функции, получаем следующие выражения:

$$\frac{\partial g}{\partial\dot{\mathbf{X}}}=\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\overline{\omega}_l}\cdot\frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\dot{\mathbf{X}}},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{X}}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{X}}} + \sum_{l=1}^{N}\left[{}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \overline{\omega}_l} + {}^{[1]}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right) \cdot \frac{\partial \widehat{g}}{\partial \overline{\omega}_l}\right],$$

$$\widetilde{\mathbf{X}} \bigwedge_{\nu} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}}\right] = \widetilde{\mathbf{X}} \bigwedge_{\nu} \left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial \widehat{g}}{\partial \mathbf{X}}\right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{N}\left[{}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \overline{\omega}_l} + {}^{[1]}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{X}}\right) \cdot \frac{\partial \widehat{g}}{\partial \overline{\omega}_l}\right]\right\}.$$

Чтобы найти ${}^{[1]}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{X}}\right)$, вычисляем производные

$$\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{Z}_l} \bigwedge_2 \frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l} \bigwedge_2 \frac{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}{\partial \mathbf{X}},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l} \bigwedge_2 \frac{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l} \bigwedge_2 \frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l} \bigwedge_2 \frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l} \bigwedge_2 \frac{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}{\partial \mathbf{X}}.$$

В последних преобразованиях использованы равенство $\frac{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} = \frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}}$ и формула (16). Таким образом, применяя формулы (51) и (55), получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{X}} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l} - \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{Z}_l}\right) \bigwedge_2 \frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}}$$

$$={}^{[1]}(\mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{Z}}_l) \bigwedge_2 \frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}} ={}^{[1]}(\mathbf{D} \cdot \widetilde{\overline{\omega}}_l \cdot \mathbf{Z}_l) \bigwedge_2 \frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}}.$$

Порядок умножения можно изменить следующим образом:

$${}^{[1]}(\mathbf{D} \cdot \widetilde{\overline{\omega}}_l \cdot \mathbf{Z}_l) \bigwedge_2 \frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}} ={}^{[1]}(\mathbf{D} \cdot \widetilde{\overline{\omega}}_l) \bigwedge_2 \left(\mathbf{Z}_l \cdot {}^{[1]}\frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}}\right)^{[1]}.$$

Применяя формулу (32), преобразуем это произведение к виду $-{}^{[1]}(\mathbf{D} \cdot \widetilde{\overline{\omega}}_l) \bigwedge_2 \left(\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right)$. Так как тензор $\mathbf{D}$ — кососимметрический, то

$$-{}^{[1]}(\mathbf{D} \cdot \widetilde{\overline{\omega}}_l) \bigwedge_2 \left(\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right) = (\mathbf{D} \cdot \widetilde{\overline{\omega}}_l) \bigwedge_2 \left(\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right)$$

$$= -[(\mathbf{D} \cdot \widetilde{\overline{\omega}}_l) \bigwedge_2 \mathbf{D}] \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}.$$

Выражая произведение в квадратных скобках по формуле (52), получаем, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\mathbf{X}} = \tilde{\overline{\omega}}_l \cdot \frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\dot{\mathbf{X}}},$$

$$^{[1]}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\mathbf{X}}\right) = -^{[1]}\left(\frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\right)\cdot\tilde{\overline{\omega}}_l,$$

откуда следует соотношение (56).

Формула (56) приобретает особо простой вид в случае, когда

$$g = \frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\overline{\omega},$$

где $\overline{\omega}$ — абсолютная угловая скорость данного тела, а $\mathbf{J}$ — его тензор инерции относительно некоторой его точки. Тогда $\dfrac{\partial g}{\partial\overline{\omega}} = \mathbf{J}\cdot\overline{\omega}$ и аналогичными преобразованиями (53) находим следующие соотношения:

$$\tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}\frac{\partial g}{\partial\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}\left(\frac{1}{2}\overline{\omega}\overline{\omega}\bigwedge_{2}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial\mathbf{X}}\right) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}{}^{[1]}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial\mathbf{X}}\bigwedge_{2}\overline{\omega}\overline{\omega}$$

$$= \left(\tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}{}^{[1]}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\right)\cdot\tilde{\mathbf{J}}\bigwedge_{2}\overline{\omega}\overline{\omega} = \left(\tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}{}^{[1]}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\right)\cdot(\tilde{\overline{\omega}}\cdot\mathbf{J}\cdot\overline{\omega}).$$

После подстановки полученных выражений в (56) имеем

$$\tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial\dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial g}{\partial\mathbf{X}}\right] = \tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}{}^{[1]}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\cdot(\mathbf{J}\cdot\dot{\overline{\omega}}). \tag{57}$$

4. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим систему, составленную из n абсолютно твердых тел со структурой дерева, которая находится в однородном поле тяжести. Допустим, что каждое тело системы имеет динамическую ось симметрии, в концах которой расположены идеальные сферические или универсальные шарниры. У одного из тел, которому присваивается номер 1, есть неподвижная точка (сферический шарнир), находящаяся на оси симметрии тела. Пусть составлен ортонормированный граф системы, нумерацию которого предполагаем правильной [1]. Дугам графа $u_1, \ldots, u_n$ отвечают шарниры, а вершинам $s_0, s_1, \ldots, s_n$ — тела системы. Вершине s_0 соответствует неподвижное в инерциальном пространстве тело, с которым связано тело 1. Введем матрицу $(T_{kj})^n_{k,j=1}$ [5] следующим образом: $T_{kj} = -1$, если вершина s_k находится на пути от s_0 к s_j, в остальных случаях $T_{kj} = 0$. Обозначим через m_k массу тела k, через $\mathbf{J}_k$ — тензор инерции дополненного тела k [5] относительно предшествующей шарнирной точки

Γ_k, а через $\mathbf{e}_3^{(k)}$ — единичный вектор, направленный по оси симметрии от точки P_k к центру массы C_k тела k. Тогда с помощью введеных в [6] постоянных

$$b_k = \frac{(c_k - l_k)m_k - l_k \sum_{j=1}^{n} T_{kj} m_j}{M},$$

$$g_{kj} = -T_{kj} b_j l_k - T_{jk} l_j b_k \qquad (k,\, j = 1,\, \ldots,\, n),$$

где $c_k = |P_k C_k|$, l_k — длина оси тела k, $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$, функция Лагранжа для системы представляется в виде

$$L = T - \Pi, \quad T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \overline{\omega_k} \cdot \mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega}_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} g_{kj} \mathbf{e}_3^{(j)} \cdot \mathbf{e}_3^{(k)},$$

$$\Pi = Mg \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{e}_3^{(j)} \cdot \mathbf{e}_3^{(0)}.$$

Допустим, что в качестве тензорных обобщенных координат системы выбраны величины $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N$. В уравнениях (45) представим функцию L в виде $L = T_1 + T_2 - \Pi$, где

$$T_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \overline{\omega}_k \cdot \mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega}_k, \quad T_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} g_{kj} \dot{\mathbf{e}}_3^{(j)} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}.$$

Для каждого слагаемого суммы T_1 можно применить формулу (57), после чего получаем

$$\widetilde{\mathbf{X}}_i \bigwedge_{\nu_i} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{X}_i} \right] = \widetilde{\mathbf{X}}_i \bigwedge_{\nu_i} \sum_{k=1}^{n} {}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot (\mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega}_k)^{\cdot}.$$

Так как $g_{kj} = g_{jk}$, для производных суммы T_2 выполняются равенства

$$\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{X}_i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} g_{kj}\, {}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3^{(j)}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} g_{kj}\, {}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3^{(j)},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{X}_i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \neq k} g_{kj} \left[{}^{[1]}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i} \right) \cdot \dot{\mathbf{e}}_3^{(i)} + {}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} \right].$$

Поскольку векторы $\mathbf{e}_3^{(k)}$ не зависят от производных $\dot{\mathbf{X}}_i$, то справедливы соотношения

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \frac{\partial \mathbf{e}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{e}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i},$$

откуда находим, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i} = \mathbf{O}_{\nu_i+1}.$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}(\overline{\omega}_k \times \mathbf{e}_3^{(k)}) = -\widetilde{\mathbf{e}}_3^{(k)} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}.$$

Таким образом окончательно

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{X}_i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\neq k}{}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega_k}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \mathbf{e}_3^{(k)} \times \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)}. \tag{58}$$

Аналогичным способом, как при выводе равенств (58), находим, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}_i} = Mg\sum_{k=1}^{n} b_k{}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \mathbf{e}_3^{(k)} \times \mathbf{e}_3^{(0)}.$$

После подстановки полученных соотношений в (45), уравнения движения системы тел записываются в виде

$$\widetilde{\mathbf{X}}_i \bigwedge_{\nu_i}\sum_{k=1}^{n}{}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega_k}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \left[(\mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega}_k)^{\cdot} + \sum_{j\neq k} g_{kj}\mathbf{e}_3^{(k)} \times \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} - Mgb_k\mathbf{e}_3^{(k)} \times \mathbf{e}_3^{(0)}\right] \tag{59}$$

$$= \mathbf{O}_{\frac{1}{2}(3\nu_i-\nu_i^2)} \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Рассмотрим теперь частные случаи, в которых укажем конкретный способ выбора тензорных обобщенных координат.

1. Пусть все шарниры системы являются сферичными и для тензорных обобщенных координат системы выбраны ортонормированные тензоры $\mathbf{Z}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, которые определяют угловую ориентацию тел относительно инерциального пространства. Очевидно, эти переменные являются независимыми. Так как $\dfrac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_i} = \mathbf{O}_3$ для $i \neq k$, то уравнения движения принимают вид

$$\mathbf{Z}_i \bigwedge_{2}{}^{[1]}\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_i}\left[(\mathbf{J}_i \cdot \overline{\omega}_i)^{\cdot} + \sum_{j\neq i} g_{ij}\mathbf{e}_3^{(i)} \times (\ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} + Mgb_i\mathbf{e}_3^{(0)})\right] = \mathbf{O} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Используя формулу (48), получаем уравнения

$$(60)\qquad (\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega_i})^{\bullet}+\sum_{j\neq i} g_{ij}\mathbf{e}_3^{(i)}\times(\ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)}+Mgb_i\mathbf{e}_3^{(0)})=\mathbf{O}\quad (i=1,\ldots,n),$$

которые можно вывести непосредственно из теоремы о кинетическом моменте.

2. Рассмотрим другой способ выбора тензорных обобщенных координат. Для каждого тела номер k выбираем неизменно связанный с ним базис $\mathbf{e}_1^{(k)},\mathbf{e}_2^{(k)},\mathbf{e}_3^{(k)}$ и фиксированный в инерциальном пространстве единичный вектор $\mathbf{a}_k$, для которого предполагаем выполнение условия $\mathbf{e}_3^{(k)}\times\mathbf{a}_k\neq 0$. Единичный вектор

$$\mathbf{p}_k=\frac{\mathbf{a}_k\times\mathbf{e}_3^{(k)}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{e}_3^{(k)}|}.$$

образует с вектором $\mathbf{e}_1^{(k)}$ угол, который обозначим через ϕ_k. В качестве тензорных обощенных координат системы принимаем векторы $\mathbf{e}_3^{(k)}$ и скалярные величины ϕ_k $(k=1,\ldots,n)$. Используя равенства (42), получаем лагранжиан L в виде функции выбранных тензорных координат. Так как

$$\frac{\partial\overline{\omega}_k}{\partial\phi_i}=\begin{cases}\mathbf{O}, & i\neq k\\ \mathbf{e}_3^{(i)}, & i=k,\end{cases}\quad \frac{\partial\overline{\omega}_k}{\partial\dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}=\begin{cases}\mathbf{O}_2, & i\neq k\\ \mathbf{A}_i, & i=k,\end{cases}$$

где $\mathbf{A}_i=\dfrac{(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{e}_3^{(i)})\mathbf{e}_3^{(i)}\mathbf{p}_i}{|\mathbf{a}_i\times\mathbf{e}_3^{(i)}|}+\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}$, то уравнения теперь принимают вид

$$\mathbf{e}_3^{(i)}\cdot(\mathbf{J}_i\overline{\omega_i})^{\bullet}=0,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot\mathbf{A}_i^{\mathrm{T}}\cdot[(\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega}_i)^{\bullet}+\mathbf{e}_3^{(i)}\times(\sum_{j\neq k}g_{ij}\ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)}-Mb_ig\mathbf{e}_3^{(0)})]=\mathbf{0}\quad (i=1,\ldots,n).$$

Используя первое уравнение, вычисляем произведение

$$\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot\mathbf{A}_i\cdot(\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega}_i)^{\bullet}=\frac{(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{e}_3^{(i)})}{|\mathbf{a}_i\times\mathbf{e}_3^{(i)}|}\mathbf{e}_3^{(i)}\mathbf{p}_i\cdot[\mathbf{e}_3^{(i)}(\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega}_i)^{\bullet}$$

$$-\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot(\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega_i})^{\bullet}]=-\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot(\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega_i})^{\bullet}.$$

Тензор $-\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}=\mathbf{E}_2-\mathbf{e}_3^{(i)}\mathbf{e}_3^{(i)}=\mathbf{e}_1^{(i)}\mathbf{e}_1^{(i)}+\mathbf{e}_2^{(i)}\mathbf{e}_2^{(i)}$ действует как ортогональное проектирование на плоскость с нормальным вектором $\mathbf{e}_3^{(i)}$. Так как вектор $\mathbf{e}_3^{(i)}\times\mathbf{x}$, $\mathbf{x}\in\mathcal{E}$, тоже находится в этой плоскости, то уравнения движения приобретают вид

$$\mathbf{e}_3^{(i)}\cdot(\mathbf{J}_i\cdot\omega_i)^{\bullet}=0,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)} \cdot \left[(\mathbf{J}_i \cdot \omega_i)^{\cdot} + \mathbf{e}_3^{(i)} \times \left(\sum_{j \neq i} g_{ij} \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} - M b_i g \mathbf{e}_3^{(0)} \right) \right] = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

и являются проекциями равенства (60) на ось, параллельную вектору $\mathbf{e}_3^{(i)}$, и на плоскость, ортогональную этому вектору.

3. Пусть все шарниры системы — универсальные и оси каждого шарнира являются перпендикулярными между собой. Предположим также, что система является одноконтурной кинематической цепью.

Базис $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$, жестко связанный с телом 1, выбираем как в примере 2., т. е. таким образом, чтобы направление вектора $\mathbf{e}_3^{(1)}$ совпало с осью симметрии тела 1. Наличие в системе универсальных шарниров накладывает ограничения на угловые положения остальных тел, в отличие от рассмотренной в предыдущих примерах системы, в которой все тела могут занимать произвольные угловые положения в абсолютном пространстве. Из-за этого обстоятельства оказывается целесообразным в качестве тензорных обобщенных координат системы принять параметры, определяющие относительные положения соседних тел.

Рассмотрим тело номер k ($k = 2, \dots, n$). В качестве базисного вектора $\mathbf{e}_3^{(k)}$ выбираем единичный вектор оси симметрии тела номер k, который имеет направление от центра шарнира, соединяющего тело номер k с телом номер $(k-1)$, к центру масс тела k. Одна из осей этого шарнира, которая определяется единичным вектором $\mathbf{u}_k$ ($\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_3^{(k-1)} = 0$), остается неподвижной относительно тела k. Так как оси шарнира перпендикулярны между собой, то единичный вектор $\mathbf{e}_1^{(k)}$, направленный по этой оси, можно определить равенством

$$\mathbf{e}_1^{(k)} = \frac{\mathbf{u}_k \times \mathbf{e}_3^{(k)}}{|\mathbf{u}_k \times \mathbf{e}_3^{(k)}|},$$

а вектор $\mathbf{e}_2^{(k)}$ определяем из соотношения $\mathbf{e}_2^{(k)} = \mathbf{e}_3^{(k)} \times \mathbf{e}_1^{(k)}$. Таким образом относительное движение тела k по отношению к телу $(k-1)$ можно определить, задавая вектор $\mathbf{e}_3^{(k)}$ относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}^{(k-1)}$. Если $\underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathbf{T}}$ — ортонормированный инерциальный базис, то абсолютное положение тела k определяется тензором

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{e}_1^{(k)}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^{(k)}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3^{(k)}\mathbf{e}_3.$$

Применяя формулу (42), находим, что угловая скорость $\overline{\Omega_k}$ базиса $\mathbf{e}^{(k)}$ относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}^{(k-1)}$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{\Omega_k} = \mathbf{A}_k \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}_3^{(k)}, \mathbf{A}_k = \frac{(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_3^{(k)})\mathbf{e}_3^{(k)}\mathbf{e}_1^{(k)}}{|\mathbf{u}_k \times \mathbf{e}_3^{(k)}|} + \tilde{\mathbf{e}}_3^{(k)},$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{e}}{}_3^{(k)} = (\mathbf{e}_1^{(k)} \cdot \mathbf{e}_1^{(k-1)})^{\bullet}\mathbf{e}_1^{(k-1)} + (\mathbf{e}_2^{(k)} \cdot \mathbf{e}_2^{(k-1)})^{\bullet}\mathbf{e}_2^{(k-1)} + (\mathbf{e}_3^{(k)} \cdot \mathbf{e}_3^{(k-1)})^{\bullet}\mathbf{e}_3^{(k-1)}$ — относительная производная вектора относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}^{(k-1)}$ ($k = 2, \dots, n$).

Согласно равенству (24), абсолютная угловая скорость тела k выражается суммой

$$(61)\qquad \overline{\omega}_k = \overline{\omega}_{k-1} + \overline{\Omega}_k = \overline{\omega}_1 + \sum_{j=2}^{n} \mathbf{A}_j \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}_3^{(j)} \quad (k = 2, \ldots, n),$$

где абсолютная угловая скорость $\overline{\omega}_1$ определяется из равенства $\widetilde{\overline{\omega}}_1 = \dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}$.

Приведение формулы показывают, что в качестве тензорных обобщенных координат системы можно принять тензор $\mathbf{Z}_1$, задающий положение тела 1. и векторы $\mathbf{e}_3^{(2)}, \ldots, \mathbf{e}_3^{(n)}$. Для производных абсолютных угловых скоростей получаем выражения

$$\frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_1} = \frac{\partial \overline{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_1}, \qquad \frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}_3^{(j)}} = \begin{cases} \mathbf{O}, & k < i \\ \mathbf{A}_i, & k \geqq i \end{cases}$$

$$(k = 1, \ldots, n, i = 2, \ldots, n).$$

Подставляя эти выражения в (59), находим следующие уравнения движения системы

$$(62)\qquad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \left[(\mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega}_k)^{\cdot} + \mathbf{e}_3^{(k)} \times \left(\sum_{j \neq k} g_{kj} \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} + M b_k g \mathbf{e}_3^{(0)} \right) \right] = 0, \\ &\widetilde{\mathbf{e}}_3^{(i)} \cdot \mathbf{A}_i^{\mathbf{T}} \cdot \sum_{k=i}^{n} \left[(\mathbf{J}_k \overline{\omega}_k)^{\cdot} + \mathbf{e}_3^{(k)} \times \left(\sum_{j=i+1}^{n} g_{kj} \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} + M b_k \mathbf{e}_3^{(0)} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

$(i = 2, \ldots, n)$. Здесь абсолютные угловые скорости $\overline{\omega}_k$ выражаются по формуле (61).

Уравнение (62) эквивалентно двум скалярным уравнениям, которые можно получить, например, умножая его скалярно на векторы осей i-го шарнира $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{e}_1^{(i)}$. Нетрудно убедится, что

$$|\mathbf{a}_i \times \mathbf{e}_3^{(i)}|^2 = 1 - (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_3^{(i)})^2,$$

откуда следует, что

$$\mathbf{a}_i \cdot \widetilde{\mathbf{e}}_3^{(i)} \cdot \mathbf{A}_i^{\mathbf{T}} = \mathbf{a}_i, \qquad \mathbf{e}_1^{(i)} \cdot (\widetilde{\mathbf{e}}_3^{(i)} \cdot \mathbf{A}_i^{\mathbf{T}}) = \mathbf{e}_1^{(i)}.$$

Таким образом получаем $2(n-1)$ скалярных уравнений

$$\mathbf{a}_i \cdot \sum_{k=i}^{n} \left[(\mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega}_k)^{\cdot} + \mathbf{e}_3^{(k)} \times \left(\sum_{j=i+1}^{n} g_{kj} \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} + M b_k g \mathbf{e}_3^{(0)} \right) \right] = 0,$$

$$\mathbf{e}_1^{(i)} \cdot \sum_{k=i}^{n} \left[(\mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega_k})^{\bullet} + \mathbf{e}_3^{(k)} \times \left(\sum_{j=i+1}^{n} g_{kj} \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} + M b_k g \mathbf{e}_3^{(0)} \right) \right] = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Спивак, М. Математический анализ на многообразиях. Мир, М., 1968.
2. Lilov, L. Mechanical-Mathematical Modeling of multibody systems. Dr. sc. Thesis, 1985.
3. Картан, А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Мир, М., 1971.
4. Федеров, Ф. И. Группа Лоренца. М., Наука, 1979.
5. Виттенбург, Й. Динамика систем твердых тел. М., Мир, 1980.
6. Лилов, Л., Н. Василева. Стационарные движения системы гироскопов Лагранжа со структурой дерева. — Теоретична и приложна механика, 1984, XV, № 3.

Поступила 15. IV. 1989 г.