ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 82, 1988

О МАКСИМУМЕ КОЛИЧЕСТВА РЕБЕР ГРАФА

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ

Николай Хаджииванов. О МАКСИМУМЕ КОЛИЧЕСТВА РЕБЕР ГРАФА. Находится максимум количества ребер n-вершинных графов, не содержащих полных $(s+1)$-вершинных подграфов K_{s+1}, но зато имеющих дизъюнктную фамилию, состоящую из r антиклик A_i с $|A_i| \geq \alpha_i$, где α_i — наперед заданные числа, удовлетворяющие неравенствам $\alpha_i \geq [\frac{n}{s}]$.

Nikolay Khadzhiivanov. ON THE MAXIMAL NUMBER OF EDGES IN A GRAPH. The maximal number of edges in an n-graph without K_{s+1} and with disjoint family of independent sets $A_i (i = 1, 2, \ldots, r)$, such that $|A_i| \geqq \alpha_i$, where $\alpha_i \geqq [\frac{n}{s}]$, is found.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный граф. Обозначим количества вершин и ребер графа G через $v(G)$ и $e(G)$, а степень вершины v — через $d_G(v)$. Множество из k попарно смежных (несмежных) вершин графа G называется k-кликой (k-антикликой). Максимальное число попарно смежных (несмежных) вершин называется кликовым (антикликовым) числом и обозначается через $\mathrm{cl}(G)(\alpha(G))$. Если вершина v смежна вершине u, иногда будем говорить, что v является соседом вершины u.

$G = (V, E)$ — полный хроматический граф, если любая его вершина смежна хотя бы одному концу произвольного ребра, т.е. когда несмежность вершин есть отношение эквивалентности в множестве всех вершин V. Классы эквивалентности (хроматические классы) являются антикликами, вершины из разных классов смежны. Таким образом полный хроматический граф вполне определен набором чисел $h_1, h_2, \ldots, h_k$, являющихся количествами вершин в хроматических классах $H_1, H_2, \ldots, H_k$, и поэтому вполне уместно употребляемое обозначение $K(h_1, h_2, \ldots, h_k)$. Впрочем, расширим определение этого символа естественным образом, уславливаясь не обращать внимания на нулевые аргументы, иными словами, допуская наличие и пустых классов; к примеру, $K(0, h_1, h_2, h_3) = K(h_1, h_2, h_3)$.

Элементарный симметрический многочлен степени 2 обозначим через σ:

$$\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum\{x_i x_j | 1 \leqq i < j \leqq k\}.$$

Очевидно,

$$e(K(h_1, h_2, \ldots, h_k)) > \sigma(h_1, h_2, \ldots, h_k)$$

и

$$\sigma(x_1 - 1, x_2 + 1, x_3, \ldots, x_k) = \sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) + x_1 - x_2 - 1.$$

Следовательно,

$$\sigma(x_1 - 1, x_2 + 1, \ldots, x_k) > \sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

если $x_1 > x_2 + 1$, т.е.

$$(1) \qquad e(K(h_1 - 1, h_2 + 1, h_3, \ldots, h_k)) > e(K(h_1, h_2, h_3, \ldots, h_k)),$$

если $h_1 - h_2 > 1$.

Пусть n и s — натуральные числа, а $h_1, h_2, \ldots, h_s$ — целые, и $h_1 + h_2 + \cdots + h_s = n$. Из (1) следует, что $e(K(h_1, \ldots, h_s))$ имеет максимум только тогда, когда $|h_i - h_j| \leqq 1$ для любой пары i, j. В таком случае h_i определены с точностью до порядка, к примеру $h_i = \left[\frac{n+i-1}{s}\right]$.

Граф $K(h_1, h_2, \ldots, h_s)$ с $h_i = \left[\frac{n+i-1}{s}\right]$ называется *графом Турана* и обозначается через $T_s(n)$.

Итак, $T_s(n)$ имеет максимальное количество ребер среди n-вершинных полных хроматических графов G с $\mathrm{cl}(G) \leqq s$. Туран [1941] доказал, что в этом утверждении можно отказаться от требования полной хроматичности, т.е. $T_s(n)$ имеет максимальное количество ребер и в гораздо более широком классе тех n-вершинных графов G, для которых $\mathrm{cl}(G) \leqq s$.

Обладая дополнительной информацией для G, следует ожидать более точную оценку для вопросного максимума. Эту дополнительную информацию вводим в виде требования, чтобы граф G обладал дизъюнктной системой антиклик, любая из которых имеет хотя бы $]\frac{n}{s}[$ вершин ($[x] = \max\{n | n \in \mathbf{N}, n \leqq x\},]x[= \min\{n | n \in \mathbf{N}, n \geqq x\}$). Остановимся подробнее на этом.

Пусть $n \geqq s \geqq r$. n-вершинный граф $K(h_1, \ldots, h_r, h_{r+1}, \ldots, h_s)$, в котором все h_i с $i > r$, отличаются между собой не более чем на 1, обозначим через $T_s(n; h_1, h_2, \ldots, h_r)$. В случае $r = 0$ определенный только что граф совпадает с $T_s(n)$.

Основным утверждением в настоящей статье является следующая

Т е о р е м а. Пусть $n, s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ $(r \geqq 0)$ – натуральные числа, причем $n \geqq s \geqq r, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r \leqq n$, $\alpha_i \geqq]\frac{n}{s}[$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Пусть G —

n-вершинный граф с $\mathrm{cl}(G) \leqq s$, в котором имеется дизъюнктная система антиклик $A_1, A_2, \ldots, A_r$ и $|A_i| \geqq \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда

$$e(G) \leqq e(T_s(n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)),$$

причем равенство достигается единственно когда $G = T_s(n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, а множества A_i являются хроматическими классами этого графа, $|A_i| = \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

З а м е ч а н и е 1. В случае $r = 0$ утверждение совпадает с теоремой Турана.

З а м е ч а н и е 2. В случае $r = 1$ утверждение сформулировано более 10 лет тому назад в совместном обсуждении с моим дипломантом Вл. Никифоровым.

Отметим и следующее предложение, которое тривиальным образом вытекает из теоремы:

С л е д с т в и е. Пусть $n, s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ $(r \geqq 1)$ – натуральные числа, $n \geqq s \geqq r$; $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r \leqq n$; $\alpha_i \geqq]\frac{n}{s}[$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Пусть $G = (V, E)$ — n-вершинный граф с $(G) \leqq s$ и в V имеется дизъюнктная система множеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$ со следующими свойствами: 1) $|A_i| \geqq \alpha_i$; $i = 1, 2, \ldots, r$; 2) в A_i есть вершина a_i, которая несмежна любой вершине v из A_i и $d_G(a_i) \geqq d_G(v)$ $(1 \leqq i \leqq r)$. Тогда

$$e(G) \leqq e(T_s(n;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r)),$$

причем равенство достигается единственно для графа $G = T_s(n;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r)$ и множества A_i являются хроматическими классами этого графа, $|A_i| = \alpha_i$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$.

З а м е ч а н и е 3. Теорему (а значит и следствие) можно обобщить, заменяя количество ребер количеством p-клик. Доказательство, однако, не требует новых идей, хотя и содержит дополнительные технические трудности. Поэтому здесь его приводить не будем.

2. ГРАФ $T_s(n; h_1, h_2, \ldots, h_r)$

Граф $T_s(n; h_1, h_2, \ldots, h_r)$, где $n \geqq s \geqq r$ и $h_1 + \cdots + h_r \leqq n$, был определен в п.1 как n-вершинный граф $K(h_1, \ldots, h_r, h_{r+1}, \ldots, h_s)$, такой, что $K(h_{r+1}, \ldots, h_s) = T_{s-r}(n - h_1 - \cdots - h_r)$.

В случае $h_1 + \cdots + h_r = n$ или $s = r$, очевидно, $T_s(n; h_1, \ldots, h_r) = K(h_1, \ldots, h_r)$.

Граф $T_s(n; h_1, \ldots, h_r)$ — единственный, имеющий максимальное количество ребер среди n-вершинных графов типа $K(h_1, \ldots, h_r, h_{r+1}, \ldots, h_s)$. Действительно, как знаем из п.1, максимальное количество ребер среди $(n - h_1 - \cdots - h_r)$-вершинных полных хроматических графов G с $\mathrm{cl}(G) \leqq s - r$ (а $K(h_{r+1}, \ldots, h_s)$ является именно таким графом) имеет единственно граф $T_{s-r}(n - h_1 - \cdots - h_r)$, а, с другой стороны, $e(K(h_1, \ldots, h_r, h_{r+1}, \ldots, h_s)) = e(K(h_1, \ldots, h_r)) + (h_1 + \cdots + h_r)(n - h_1 - \cdots - h_r) + e(K(h_{r+1}, \ldots, h_s))$.

После этого замечания никакого труда не составит доказательство следующего предложения:

Л е м м а 1. Пусть $n, s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r (r \geqq 0)$ — натуральные числа, $n \geqq s \geqq r, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r \leqq n$; $\alpha_i \geqq]\frac{n}{s}[$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Граф $T_s(n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ — единственный граф с максимальным числом ребер среди всех n-вершинных графов типа $K(h_1, \ldots, h_r, h_{r+1}, \ldots, h_s)$, для которых $h_i \geqq \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Согласно рассуждениям, предшествующим формулировке леммы, достаточно доказать, что

$$e(T_s(n; h_1, h_2, \ldots, h_r)) \leqq e(T_s(n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r))$$

и что равенство имеется только тогда, когда

$$T_s(n; h_1, h_2, \ldots, h_r) = T_s(n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r).$$

Это утверждение непосредственно следует из неравенства

$$e(T_s(n; h_1, h_2, \ldots, h_r)) < e(T_s(n; h_1 - 1, h_2, \ldots, h_r)) \tag{2}$$

при $h_1 > \alpha_1$.

Убедимся, что оно на самом деле выполнено.

Согласно определению,

$$T_s(n; h_1, \ldots, h_r) = K(h_1, \ldots, h_r, h_{r+1}, \ldots, h_s),$$

где $K(h_{r+1}, \ldots, h_s) = T_{s-r}(n - h_1 - \cdots - h_r)$.

Так как $h_i \geqq \alpha_i \geqq]\frac{n}{s}[i = 1, 2, \ldots, r$ и $h_1 > \alpha_1$, то $h_1 + \cdots + h_r > r]\frac{n}{s}[$. Следовательно, $h_{r+1} + \cdots + h_s = n - h_1 - \cdots - h_r < n - r]\frac{n}{s}[\leqq n - r\frac{n}{s} = (s-r)\frac{n}{s} \leqq (s-r)]\frac{n}{s}[$

Будем считать, что $h_s = \min(h_{r+1}, \ldots, h_s)$. Тогда

$$(s-r)h_s \leqq h_{r+1} + \cdots + h_s < (s-r)]\frac{n}{s}[,$$

так что $h_s <]\frac{n}{s}[$ и, значит, $h_1 - h_s > 1$. Очевидно,

$$K(h_{r+1}, \ldots, h_s + 1) = T_{s-r}(n - (h_1 - 1) - h_2 - \cdots - h_r)$$

и поэтому

$$T_s(n; h_1 - 1, h_2, \ldots, h_r) = K(h_1 - 1, \ldots, h_r, \ldots, h_s + 1).$$

Таким образом неравенство (2) следует из неравенства (1).

Доказательство леммы завершено.

3. УПОДОБЛЕНИЕ

Пусть a — вершина графа G, а B — множество вершин этого графа и все вершины из B несмежны вершине a.

Удалим из G все ребра, инцидентные множеству B, а затем введем в G новые ребра, соединяющие все вершины из B с теми вершинами графа G, которые смежны в нем вершине a. Полученный граф обозначим через

G_a^B и будем говорить, что он получен уподоблением вершин из B вершине a.

Итак, граф G_a^B определен только в том случае, когда любая вершина из B несмежна вершине a. Если B состоит из одного-единственного элемента b, вместо G_a^B будем писать G_a^b.

Очевидно $\{a\} \cup B$ является антикликой в G_a^B и $d_{G_a^B}(b) = d_{G_a^B}(a) = d_G(a)$ для любой вершины $b \in B$. Ясно, что $G_a^B = G$, если $\{a\} \cup B$ — антиклика в G и все ее вершины имеют одни и те же соседи в G.

При переходе из G к G_a^B меняются эвентуально смежность или несмежность только по отношению к вершинам $b \in B \backslash \{a\}$. Как легко сообразить, верно следующее утверждение:

Л е м м а 2. $\mathrm{cl}(G_a^B) \leqq \mathrm{cl}(G)$.

Доказательство. Пусть K — p-клика графа G_a^B. Если $K \cap B \backslash \{a\} = \phi$, тогда K есть p-клика и в G. Пусть $K \cap B \backslash \{a\} \neq \phi$. Сейчас пересечение $K \cap (B \cup \{a\})$ имеет единственную вершину $b, b \neq a$, потому что K — клика, а $B \cup \{a\}$ — антиклика в G_a^B. Множество $K \backslash \{b\}$ — клика и в G, причем вершина a смежна в G вершинам этого множества, потому что a и b имеют в G_a^B одни и те же соседи, а соседи a в G_a^B и в G одинаковы. Таким образом мы убедились, что $(K \backslash \{b\}) \cup \{a\}$ — клика в G, которая содержит ровно p вершин.

Доказательство леммы завершено.

Если B — множество вершин графа G, через $d_G(B)$ обозначим число тех ребер графа G, которые инцидентны множеству B. Таким образом $d_G(B)$ есть сумма двух слагаемых: первое — число ребер с двумя концами в B, а второе — число ребер с ровно одным концом в B. Ясно, что

$$d_G(B) \leqq \sum \{d_G(b) | b \in B\}$$

и равенство имеется тогда и только тогда, когда B является антикликой в G. Очевидно,

$$e(G_a^B) = e(G) - d_G(B) + |B| d_G(a).$$

Следовательно,

$$e(G_a^B) \geqq e(G) - \sum \{d_G(b) | b \in B\} + |B| d_G(a) \tag{3}$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда B является антикликой в G. Теперь уже легко доказать следующее предложение:

Л е м м а 3. Если $d_G(a) \geqq d_G(b)$ для любой вершины b из B, тогда $e(G_a^B) \geqq e(G)$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда B — антиклика в G и $d_G(b) = d_G(a)$ для любой вершины $b \in B$.

Доказательство. Из (3) следует

$$e(G_a^B) \geqq e(G) + \sum \{d_G(a) - d_G(b) | b \in B\} \geqq e(G).$$

Равенство имеется лишь тогда, когда, с одной стороны, $d_G(b) = d_G(a)$ для любой вершины $b \in B$, а с другой — когда в (3) тоже есть равенство, т.е. B — антиклика в G.

Доказательство леммы завершено.

Следующее предложение тоже легче доказать, чем сформулировать. Тем не менее, оно должно сыграть важную роль в дальнейшем.

Л е м м а 4. Если A — антиклика в G, все вершины которой имеют одни и те же соседи в G, тогда A — антиклика и в G_a^B. Притом, если $A \cap B = \phi$, тогда все вершины из A имеют одни и те же соседи и в G_a^B.

Доказательство. Множество $A \backslash B$, очевидно, есть антиклика в G_a^B. Пусть $v \in A \cap B$. Так как $v \in B$, вершины a и v — несмежны в G. Но $v \in A$ и, значит, a несмежна в G всем вершинам из A. Так как $v \in B$, то v несмежна в G_a^B всем вершинам из A. Следовательно, A — антиклика в G_a^B. Первая часть леммы доказана.

А теперь, пусть $A \cap B = \phi$. Нужно доказать, что все вершины из A имеют одни и те же соседи в G_a^B.

Пусть v — вершина, смежная в G_a^B некоторой вершине u из A. Если $v \in B$, согласно определению графа G_a^B, вершина a смежна в G вершине u из A. Тогда a смежна в G всем вершинам из A и, следовательно, v смежна в G_a^B всем вершинам из A.

Осталось рассмотреть случай, когда $v \notin B$. Имея ввиду, что $A \cap B = \phi$, очевидно, что v и u смежны и в G. Следовательно, v смежна в G всем вершинам из A. Так как $A \cap B = \phi$ и $v \notin B$, вершина v смежна и в G_a^B всем вершинам из A.

Доказательство леммы завершено.

З а м е ч а н и е 1. Множество A вовсе не обязано быть антикликой в G_a^B в случае отказа от требования, чтобы все вершины из A имели одни и те же соседи в G. Впрочем, это требование можно заменить на более слабое: чтобы в A не существовало вершины u и v, одна из которых смежна, а другая несмежна вершине a в G, причем доказательство, что A — антиклика и в G_a^B, то же самое. Следует отметить, что если поначалу $A \cap B = \phi$, тогда без всяких дополнительных требований для антиклики A в G можно утверждать, что A является антикликой и в G_a^B, однако такое утверждение не достаточно для доказательства теоремы.

З а м е ч а н и е 2. Если $A \cap B \neq \phi$, тогда отнюдь не следует, что все вершины из A имеют одни и те же соседи в G_a^B, несмотря на то, что все вершины из A имеют одни и те же соседи в G.

З а м е ч а н и е 3. Леммы 2 и 3 в том случае, когда множество B не более чем двуточечно, содержатся в статье Зыкова [1949]. Лемма 4 аналогов в этой статье не имеет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ТУРАНА

Сделаем одно отклонение — докажем теорему Турана. Приведем одну модификацию оригинального доказательства Турана, которая выгодно отличается от него тем, что она короче. Эта модификация принадлежит Зыкову [1949]. Впрочем, в работе Зыкова нет никаких ссылок на статью Турана, и поэтому можно предположить, что он дошел до формулировки и доказательства самостоятельно.

Через S обозначим множество всех n-вершинных графов G с $\mathrm{cl}(G) \leqq s$, а через $\hat{S}$ – подмножество тех из них, которые имеют максимальное количество ребер. Мы должны доказать, что граф Турана $T_s(n)$ является единственым элементом множества $\hat{S}$.

Пусть $G \in \hat{S}$.

Докажем сначала следующее утверждение:

(4) Если a и b — несмежные вершины в G, тогда $d_G(a) = d_G(b)$.

Допустим, что (4) не верно. Из-за симметрии можно считать, что $d_G(a) > d_G(b)$. Из леммы 2 следует, что $G_a^b \in S$. Из леммы 3 следует, что $e(G_a^b) > a(G)$, что невозможно.

Импликация (4) доказана. С ее помощью нетрудно установить, что G — полный хроматический граф.

Пусть a — вершина, а $[b,c]$ — ребро графа G. Нужно доказать, что a смежна хотя бы одной из вершин b, c. Допустим, что это не так. Тогда из (4) следует, что $d_G(b) = d_G(a) = d_G(c)$. Из леммы 2 следует, что $G_a^{\{b,c\}} \in S$, а из леммы 3 — что $e\left(G_a^{\{b,c\}}\right) > e(G)$, потому что $\{b,c\}$ не есть антиклика в G. Полученное противоречие завершает доказательство.

Итак, G — полный хроматический граф. Так как все полные хроматические графы с кликовым числом $\leqq s$ тоже принадлежат множеству S, то G имеет максимальное количество ребер среди них и (см. определение графа $T_s(n)$ в п.1), значит, $G = T_s(n)$.

Доказательство теоремы завершено.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

В статье Хаджииванова [1976] было изложено одно доказательство теоремы Турана, которое ближе к оригинальному доказательству по сравнению с доказательством Зыкова. Однако его легче усовершенствовать таким образом, чтобы трансформировать в доказательство основной теоремы (см. ее формулировку в п. 1). Тем не менее, этому мы предпочтем другой путь. Таким образом мы предоставим возможность читателю самому судить о сходствах и отличиях доказательства основной теоремы, которое здесь изложим, по сравнению с доказательством теоремы Турана, уже изложенном в п. 4.

Через S обозначим множество всех графов, удовлетворяющих требованиям теоремы, а через $\hat{S}$ — подмножество тех графов из S, которые имеют максимальное количество ребер. Нужно доказать, что $\hat{S}$ содержит единственный элемент и это граф $T_s(n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$.

Пусть $G \in \hat{S}$ и $A_1, A_2, \dots, A_r$ — те антиклики в G, существование которых обеспечивается условием теоремы.

В антиклике A_1 выберем вершину a_1 с максимальной степенью в G среди вершин множества A_1. Определим граф $G_1 = G_{a_1}^{A_1}$. Согласно лемме 2, $\mathrm{cl}(G_1) \leqq s$. Очевидно, $A_1, A_2, \dots, A_r$ — антиклики и в G_1. Согласно лемме 3, $e(G_1) \geqq (e(G)$ и, значит, $G_1 \in \hat{S}$.

Все вершины из A_1 имеют в G_1 одни и те же соседи.

Ту же самую операцию проделаем и с графом G_1, на этот раз по отношению к его антиклике A_2: выберем в ней вершину с максимальной степенью в G_1 среди всех вершин из A_2 и введем в рассмотрение граф $G_2 = (G_1)^{A_2}_{a_2}$. Разумеется, множества A_i являются антикликами и в G_2 и снова имеем $G_2 \in \hat{S}$. Все вершины из A_2 имеют в G_2 одни и те же соседи. Следует, однако, отметить что это имеет место и по отношению к вершинам из множества A_1, которое этим свойством обладало в G_1. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить лемму 4, не забывая, что A_1 и A_2 – дизъюнктивные антиклики в G_1.

Итак, в графе G_2 из $\hat{S}$ множества $A_1, A_2, \ldots, A_r$ являются антикликами, причем все вершины из A_i, $i = 1, 2$, имеют в G_2 одни и те же соседи.

Теперь уже совсем ясно, что, повторяя проделанную нами два раза операцию, в r шагах определим граф $\hat{G}$, принадлежащий множеству $\hat{S}$, и к тому же множества $A_1, A_2, \ldots, A_r$ являются антикликами в $\hat{G}$, причем все вершины из одного и того же A_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, имеют в $\hat{G}$ одни и те же соседи.

Установим, что $\hat{G}$ — полный хроматический граф.

Докажем сначала следующее утверждение:

(5) Если a и b — несмежные вершины в $\hat{G}$, то $d_{\hat{G}}(a) = d_{\hat{G}}(b)$.

Допустим, что (5) не верно. Без ограничения общности можно считать, что $d_{\hat{G}}(a) > d_{\hat{G}}(b)$. Согласно лемме 2, $\mathrm{cl}(\hat{G}^b_a) \leqq s$. Согласно лемме 4, $A_1, A_2, \ldots, A_r$ являются антикликами в $\hat{G}^b_a$. Следовательно, $\hat{G}^b_a \in S$. Из леммы 3 следует, что $e(\hat{G}^b_a) > e(\hat{G})$, а это невозможно.

Импликация (5) доказана.

Из (5) полная хроматичность графа $\hat{G}$ следует непосредственно. Пусть a – вершина, а $[b, c]$ — ребро графа $\hat{G}$. Нужно доказать, что a смежна в $\hat{G}$ хотя бы одной из вершин b, c. Допустим, что это не так. Из леммы 2 вытекает $\mathrm{cl}(\hat{G}^{\{b,c\}}_a) \leqq s$. Из леммы 4 следует, что $A_1, A_2, \ldots, A_r$ являются антикликами в $\hat{G}^{\{b,c\}}_a$. Следовательно, $\hat{G}^{\{b,c\}}_a \in S$. Из (5) следует, что $d_{\hat{G}}(b) = d_{\hat{G}}(a) = d_{\hat{G}}(c)$. Так как $\{b, c\}$ не есть антиклика в $\hat{G}$, то из леммы 3 следует, что $e(\hat{G}^{\{b,c\}}_a) > e(G)$.

Полученное противоречие показывает, что $\hat{G}$ — полный хроматический граф, принадлежащий множеству $\hat{S}$. Обозначим через $H_1, H_2, \ldots, H_s$ его хроматические классы и положим $h_i = |H_i|$, так что $\hat{G} = K(h_1, h_2, \ldots, h_s)$.

Множества A_i являются антикликами в $\hat{G}$, и поэтому любое из них содержится в некотором H_j. Докажем, что разные A_i содержатся в разных H_j.

Допустим, что это не так и пусть, например, $A_1 \subset H_1 \supset A_2$. Тогда можно считать, что

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r \subset H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{r-1}.$$

В таком случае выполнены неравенства

$$h_1 \geqq \alpha_1 + \alpha_2, h_1 + \cdots + h_{r-1} \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r \geqq r]\frac{n}{s}[\,.$$

Положим $h_s = \min(h_r, h_{r+1}, \ldots, h_s)$. Тогда

$$(s-r+1)h_s \leqq h_r + \cdots + h_s = n - h_1 - \cdots - h_{r-1} \leqq n - r]\frac{n}{s}[\leqq (s-r)\frac{n}{s} < (s-r+1)]\frac{n}{s}[$$

и, следовательно, $h_s <]\frac{n}{s}[$. Так как $\alpha_1 \geqq]\frac{n}{s}[> h_s$, то

$$h_1 - h_s \geqq \alpha_1 + \alpha_2 - h_s > \alpha_2.$$

Введем граф

$$G' = K(h_1 - \alpha_2, h_2, \ldots, h_s + \alpha_2).$$

Очевидно, $G' \in S$, так как $\mathrm{cl}(G') \leqq s$ и в G' имеется дизъюнктная система антиклик, количества вершин которых соответственно равны $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_r|$. Докажем, что $e(G') > e(\hat{G})$. Действительно,

$$e(G') - e(\hat{G}) = \sigma(h_1 - \alpha_2, h_2, \ldots, h_s + \alpha_2) - \sigma(h_1, \ldots, h_s) = \alpha_2(h_1 - h_s - \alpha_2),$$

а, как было установлено только что, $h_1 - h_s - \alpha_2 > 0$.

Итак, $G' \in S$ и $e(G') > e(\hat{G})$, а это противоречит включению $\hat{G} \in \hat{S}$.

Таким образом доказано, что различные A_i содержатся в различных H_j. Поэтому можно считать, что $h_i \geqq |A_i| \geqq \alpha_i$, $i = 1, \ldots, r$. Теперь уже с помощью леммы 1 заключаем, что $\hat{G} = T_s(n; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

Докажем, что антиклики $A_1, \ldots, A_r$ совпадают с r из самых больших хроматических классов графа $T_s(n; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Нетрудно сообразить, что за исключением первых r хроматических классов этого графа, любой из остальных имеет не больше $]\frac{n}{s}[$ элементов. Следовательно, сумма количеств вершин произвольных r хроматических классов не превосходит числа $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r \leqq |A_1| + \cdots + |A_r|$. Поэтому $|A_i| = \alpha_i$; $i = 1, 2, \ldots, r$.

Итак, $\hat{G} = T_s(n; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, причем A_i - хроматические классы этого графа и $|A_i| = \alpha_i$; $i = 1, 2, \ldots, r$.

В процессе построения графа $\hat{G}$ смежность или несмежность тех пар вершин, которые лежат вне $A_1 \cup \ldots \cup A_r$, сохраняется. Что касается тех пар вершин, которые имеют хотя бы одну вершину в объединении $A_1 \cup \ldots \cup A_r$, то там могут произойти изменения. Однако такие пары, которые, разумеется, не содержатся в одном и том же A_i, смежны в $\hat{G}$. Таким образом оказывается, что G — подграф графа $\hat{G}$. Если допустить, что $G \neq \hat{G}$, тогда $e(G) < e(\hat{G})$, что противоречит принадлежности G к $\hat{S}$. Следовательно, $G = \hat{G}$.

Окончательно, доказано, что $G = T_s(n; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ и множества A_1, A_2, …, A_r являются хроматическими классами этого графа, причем $|A_i| = \alpha_i$; $i = 1, 2, \ldots, r$.

Доказательство теоремы завершено.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ

Положим $G_1 = G_{a_1}^{A_1}, G_2 = (G_1)_{a_2}^{A_2}, \ldots, G_r = (G_{r-1})_{a_r}^{A_r}$. Множества $A_1, A_2, \ldots, A_r$ являются антикликами в G_r и, согласно лемме 3, $e(G_r) \geqq$

$e(G)$, причем равенство влечет, что A_i — антиклики в G. Так как $\mathrm{cl}(G_r) \leqq s$ (см. лемму 2), то G_r удовлетворяет всем требованиям теоремы и, следовательно, $e(G_r) \leqq e(T_s(n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r))$. Таким образом

$$e(G) \leqq e(T_s(n; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)).$$

Если в этом неравенстве имеет место знак равенства, тогда $e(G) = e(G_r)$ и, значит, $A_1, A_2, \ldots, A_r$ — антиклики в G. Тогда можно применить теорему и заключить, что $G = T_s(n; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

Следствие доказано.

7. ОБСУЖДЕНИЕ ТЕОРЕМЫ

В лемме 1 можно ослабить предположение $\alpha_i \geqq]\frac{n}{s}[$, заменив его неравенством $\alpha_i \geqq [\frac{n}{s}]$. Это вносит, однако, некоторые минимальные осложнения в ее доказательстве. Так, например, неравенство (2) может и не выполняться, если $\alpha_1 = [\frac{n}{s}]$ и $h_1 = [\frac{n}{s}] + 1$. Дело в том, что сейчас нельзя утверждать, что $h_1 - h_s > 1$, а только, что $h_1 - h_s \geqq 1$, как нетрудно убедиться. Если $h_1 - h_s = 1$, т.е. $h_s = [\frac{n}{s}]$, тогда вместо (2) имеет место равенство. Тем не менее, все в порядке, потому что в этом случае $T_s(n; h_1 - 1, h_2, \ldots, h_r) = T_s(n; h_1, \ldots, h_r)$, как это нетрудно установить.

Итак, лемма 1 верна при более слабом ограничении $\alpha_i \geqq [\frac{n}{s}]$, $i = 1, \ldots, r$. С незначительными осложнениями в доказательстве теоремы можно установить, что она тоже остается верной при менее ограничительных предположениях $\alpha_i \geqq [\frac{n}{s}]$, $i = 1, 2, \ldots, r$. То же самое относится, конечно, и к следствию.

Невозможно дальнейшее ослабление в этом духе предположений теоремы. Так, еще при $r = 1$ нельзя утверждать, что если $\alpha_1 < [\frac{n}{s}]$, граф $T_s(n; \alpha_1)$ имеет максимальное количество ребер среди графов G, для которых $v(G) = n, \mathrm{cl}(G) \leqq s, \alpha(G) \geqq \alpha_1$. Это просто неверно. Действительно, граф $T_s(n)$ в этом случае удовлетворяет всем перечисленным требованиям, однако $e(T_s(n)) > e(T_s(n; \alpha_1))$. Чтобы охватить и случай $\alpha_1 < [\frac{n}{s}]$, формулировку теоремы (при $r = 1$) нужно видоизменить следующим образом:

Среди графов G, для которых $v(G) = n, \mathrm{cl}(G) \leqq s, \alpha(G) \geqq \alpha_1$, максимальное количество ребер при $\alpha_1 \geqq [\frac{n}{s}]$ имеет только граф $T_s(n; \alpha_1)$, а при $\alpha_1 < [\frac{n}{s}]$ — только граф $T_s(n)$.

Аналогичным образом можно обобщить основную теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. З ы к о в, А. О некоторых свойствах линейных комплексов. — Математический сборник, **24**, No2, 1949, 163–188.

2. Х а д ж и и в а н о в, Н. Обобщение теоремы Ту́рана о графах. — Докл. БАН, **29**, No11, 1976, 1567–1570.

3. T u r a n, P. On an extremal problem in graph theory. — Mat. Fiz. Lapok, **48**, 1941, 436–452.