ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMÁTIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 82, 1988

# ПЪЛНИ СИСТЕМИ ОТ ФУНКЦИИ НА ВЕБЕР — ЕРМИТ

ПЕТЪР РУСЕВ

*Петър Русев.* ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ВЕБЕРА — ЭРМИТА. Пусть $\{D_\nu(z)\}_{\nu\in\mathbf{C}}$ обозначает систему функций Вебера — Эрмита. Доказывается, что система

$$(*)\qquad \left\{\exp\left(-t^2/4\right) D_{\omega n+\sigma}(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

полна в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$, если $0<\omega<4/3$ и $\operatorname{Re}\sigma>-1/2$. Полнота функций Ермита

$$(**)\qquad \left\{\exp\left(-t^2/2\right) H_n(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

в том же пространстве является частным случаем ($\omega=1$, $\sigma=0$).

*Peter Rusev.* COMPLETE SYSTEMS OF WEBER — HERMITE FUNCTIONS. Let $\{D_\nu(z)\}_{\nu\in\mathbf{C}}$ be the system of Weber — Hermite functions. It is proved that the system $(*)$ is complete in the space $L_2(-\infty,+\infty)$, if $0<\omega<4/3$ and $\operatorname{Re}\sigma>-1/2$. The completeness of Hermite functions $(**)$ in the same space is a particular case ($\omega=1$, $\sigma=0$).

## 1. ФУНКЦИИ НА ВЕБЕР — ЕРМИТ

Всяко (аналитично) решение на диференциалното уравнение

$$y''+\left(\nu+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)y=0,\qquad \nu\in\mathbf{C},$$

се нарича функция на параболичния цилиндър или още функция на Вебер–Ермит. Такава е например функцията $D_\nu$, дефинирана чрез

$$D_\nu(z) = 2^{\frac{\nu}{2}} \exp\left(\frac{-z^2}{4}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \Phi\left(\frac{-\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) + \frac{z}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}\right)} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right),$$

където $\Phi(a, c; z)$ е една от стандартните изродени хипергеометрични функции ([1], II, 8.2, (4)). В частност, ако $\nu = n$ е цяло неотрицателно число,

$$\exp\left(\frac{t^2}{4}\right) D_n(t) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

където $H_n$ е $n$-тият полином на Ермит ([1], II, 8.2, (9)).

От горното съотношение получаваме, че

$$\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) H_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) D_n(t), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и ако дефинираме $H_n^*(t) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$, идваме до равенството

$$\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) H_n{}^*(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) D_n(t), \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Както не е трудно да се убедим, пълнотата на системата

$$\left\{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) H_n^*(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

в пространството $L_2(-\infty, +\infty)$ е еквивалентна с пълнотата на системата функции на Ермит

$$\left\{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) H_n(t)\right\}_{n=0}^{\infty} \tag{2}$$

в същото пространство. Това, накратко казано, е следствие от обстоятелството, че всяка от системите $\{H_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{H_n^*(t)\}_{n=0}^{\infty}$ е линейно независима, тъй като $\deg H_n = \deg H_n^* = n$ за всяко $n = 0, 1, 2, \dots$ и следователно е базис на пространството на полиномите.

В сила е интегралното представяне ([1],II, 8.3, (4))

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) D_\nu(t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^\nu \cos\left(tu - \nu\frac{\pi}{2}\right) du,$$

което е валидно, ако $\mathrm{Re}\nu > -1$.

Да дефинираме за $t \in (-\infty, +\infty)$, $z \in \mathbb{C}$ и $\sigma \in \mathbb{C}$

$$W_\sigma(z, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) D_{z+\sigma}(t).$$

Тогава получаваме интегралното представяне

$$W_\sigma(z,t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^{z+\sigma} \cos\left(tu - \pi\frac{z+\sigma}{2}\right) du,$$

което е валидно за $\mathrm{Re}z > -1 - \mathrm{Re}\sigma$. От него следва, че

$$W_\sigma(z,t) = \cos\frac{\pi(z+\sigma)}{2} U_\sigma(z,t) + \sin\frac{\pi(z+\sigma)}{2} V_\sigma(z,t), \tag{3}$$

където

$$U_\sigma(z,t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^{z+\sigma} \cos tu\, du, \tag{4}$$

$$V_\sigma(z,t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) .u^{z+\sigma} \sin tu\, du. \tag{5}$$

Каквото и да е $x_0 > -1 - \mathrm{Re}\sigma$, всеки от интегралите в (4) и (5) е равномерно сходящ в ивицата $-1 - \mathrm{Re}\sigma < \mathrm{Re}z < x_0$. Следователно всеки от тях дефинира комплексна функция, която е холоморфна в полуравнината $\mathrm{Re}z > -1 - \mathrm{Re}\sigma$. Съгласно (3) същото важи и за функцията $W_\sigma(z,t)$, разглеждана като функция на комплексната променлива $z$ в тази полуравнина.

Функциите (4) и (5) могат да се изразят чрез функцията $\Phi(a,c;z)$, а именно в сила са представянията ([2], стр.509, 3.952, 7., 8.)

$$2^{-\frac{z+\sigma-1}{2}} U_\sigma(z,t) = \Gamma\left(\frac{z+\sigma+1}{2}\right) \Phi\left(\frac{z+\sigma+1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{t^2}{2}\right), \tag{6}$$

$$2^{-\frac{z+\sigma}{2}} V_\sigma(z,t) = t\Gamma\left(\frac{z+\sigma+2}{2}\right) \Phi\left(\frac{z+\sigma+2}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{t^2}{2}\right). \tag{7}$$

От асимптотичната формула ([1], I, стр.286, 6.13)

$$\Phi(a,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-x)^{(-a)}\left(1 + O(|x|^{-1})\right), \qquad \mathrm{Re}x \to -\infty$$

и от представянията (6) и (7) следва тогава, че за всяко $z = x + iy$ с $x > -1 - \mathrm{Re}\sigma$:

$$|U_\sigma(z,t)| = O(|t|^{-x-\mathrm{Re}\sigma-1}), \quad |t| \to +\infty,$$
$$|V_\sigma(z,t)| = O(|t|^{-x-\mathrm{Re}\sigma-1}), \quad |t| \to +\infty.$$

От горните съотношения следва, че каквото и да е $z$ с $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\sigma$, всяка от функциите $U_\sigma(z,t)$ и $V_\sigma(z,t)$ е от пространството $L_2(-\infty,+\infty)$. От (3) следва, че същото важи и за $W_\sigma(z,t)$ като функция на $t$ за всяко фиксирано $z$ с $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\sigma$.

## 2. ПОМОЩНИ ТВЪРДЕНИЯ

Л е м а 1. Каквито и да са $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, съществува константа $A = A(\alpha,\beta)$, такава, че за всяко $z = x + iy$ с $x \geqq 0$ е изпълнено неравенството

$$\frac{\Gamma(\alpha x+\beta)}{\left|\Gamma\left(\alpha z+\beta+\frac{1}{2}\right)\right|} \leqq A\exp\left(\frac{\pi\alpha}{2}|y|\right).$$

*Доказателство.* Съгласно формулата на Стирлинг за $|\arg z| < \pi$ е в сила представянето

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\exp\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z\right\}\{1+\gamma(z)\}.$$

При това каквото и да е $0 < \varepsilon < \pi$, $\lim\limits_{z\to\infty}\gamma(z) = 0$, щом $|\arg z| \leqq \pi - \varepsilon$. Следователно съществува $0 < r < +\infty$, такова, че $\frac{1}{2} \leqq |1+\gamma(z)| \leqq \frac{3}{2}$ при условие, че $\mathrm{Re}z \geqq 0$ и $|z| \geqq r$. Тогава, ако $x \geqq 0$ и $\alpha x + \beta \geqq r$,

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha x+\beta) &\leqq 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left\{\left(\alpha x+\beta-\frac{1}{2}\right)\ln(\alpha x+\beta)-\alpha x-\beta\right\}\\ &\leqq 3\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\exp\left\{(\alpha x+\beta)\ln(\alpha x+\beta)-\alpha x-\beta\right\}.\end{aligned}$$

Дефинираме $l(\alpha,\beta)$ чрез

$$l(\alpha,\beta) = \max_{0\leq x\leq r}\frac{\Gamma(\alpha x+\beta)}{\exp\{(\alpha x+\beta)\ln(\alpha x+\beta)-\alpha x-\beta\}}$$

и означаваме $L(\alpha,\beta) = \max\left\{3\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}, l(\alpha,\beta)\right\}$. Тогава за всяко $x \geqq 0$ е изпълнено неравенството

$$\Gamma(\alpha x+\beta) \leqq L(\alpha,\beta)\exp\{(\alpha x+\beta)\ln(\alpha x+\beta)-\alpha x-\beta\}.$$

Също така за $x = \mathrm{Re}z \geqq 0$ и $|z| \geqq r$ е в сила неравенството

$$\left|\Gamma\left(\alpha z+\beta+\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$\geqq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left\{(\alpha x+\beta)\ln\left|\alpha z+\beta+\frac{1}{2}\right| - \alpha y\arg\left(\alpha z+\beta+\frac{1}{2}\right)-\alpha x-\beta-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\geqq \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\exp\left\{(\alpha x+\beta)\ln(\alpha x+\beta)-\left(\pi\frac{\alpha}{2}\right)|y|-\alpha x-\beta\right\},$$

или все едно неравенството

$$\left|\Gamma\left(\alpha z+\beta+\frac{1}{2}\right)\right|^{-1} \leqq \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \exp\left\{-(\alpha x+\beta)\ln(\alpha x+\beta)+\frac{\pi\alpha}{2}|y|+\alpha x+\beta\right\}.$$

Дефинираме

$$m(\alpha,\beta)$$

$$= \max_{|z|\leqq r, \mathrm{Re} z\geqq 0} \left|\Gamma\left(\alpha z+\beta+\frac{1}{2}\right)\right|^{-1} \exp\left\{(\alpha x+\beta)\ln(\alpha x+\beta)-\frac{\pi\alpha}{2}|y|-\alpha x-\beta\right\}.$$

и означаваме $M(\alpha,\beta)=\max\left\{\sqrt{\frac{2e}{\pi}}, m(\alpha,\beta)\right\}$. Тогава за всяко $z=x+iy$ с $x\geqq 0$ е изпълнено неравенството

$$\left|\Gamma\left(\alpha z+\beta+\frac{1}{2}\right)\right|^{-1} \leqq M(\alpha,\beta)\exp\left\{-(\alpha x+\beta)\ln(-\alpha x+\beta)+\frac{\pi\alpha}{2}|y|+\alpha x+\beta\right\}.$$

Остава да дефинираме $A(\alpha,\beta)=L(\alpha,\beta)/M(\alpha,\beta)$.

Л е м а 2. Ако $a>0$, $\lambda>0$, $\delta>-\frac{1}{2}$ и $0<\mu<2\lambda$, системата

$$\left\{\exp\left(-at^{\lambda}\right)t^{\mu n+\delta}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

е пълна в пространството $L_2(0,+\infty)$.

*Доказателство.* За $\mathrm{Re} z>-\frac{\delta+\frac{1}{2}}{\mu}$ и $q\in L_2(0,+\infty)$ дефинираме

$$Q(z)=\int_0^\infty \exp(-at^{\lambda})t^{\mu z+\delta}q(t)\,dt. \tag{8}$$

Функцията $Q(z)$ е холоморфна в полуравнината $\mathrm{Re} z>-\frac{\delta+\frac{1}{2}}{\mu}$. Това е следствие от (абсолютно) равномерната сходимост на интеграла отдясно на (8) във всяка ивица от вида $-\frac{\delta+\frac{1}{2}}{\mu}<\mathrm{Re} z<x_0$, която от своя страна следва от неравенството на Шварц и допускането, че функцията $q\in L_2(0,+\infty)$.

Функцията $Q^*(z)$, дефинирана чрез $Q^*(z)=Q(\frac{z-\delta}{\mu})$, е холоморфна в полуравнината $\mathrm{Re} z>-\frac{1}{2}$ и в тази полуравнина е валидно интегралното представяне

$$Q^*(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-zu)q^*(u)\,du,$$

където

$$q^*(u) = \exp\{-a\exp(-\lambda u) - u\}\, q(\exp(-u)).$$

Да означим

$$T = \max_{u\in(-\infty,+\infty)} \exp\left\{-a\exp(-\lambda u) - \frac{u}{2}\right\}.$$

Понеже за всяко $u \in (-\infty, +\infty)$ е изпълнено неравенството

$$|q^*(u)| \leqq T|q(\exp(-u))| \exp\left(-\frac{u}{2}\right),$$

функцията $q^*(u)$ е от пространството $L_2(-\infty, +\infty)$. Тогава от формулата на Парсевал за преобразуванието на Лаплас на функциите от това пространство ([6], с.252, (2)) следва, че

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |q^*(u)|^2\, du = \int_{-\infty}^{\infty} |Q^*(iy)|^2\, dy. \tag{9}$$

За $z = x + iy$ с $x \geqq 0$ получаваме, че

$$|Q(z)|^2 \leqq \int_0^{\infty} \exp(-2at^{\lambda})t^{2(\mu x+\delta)}\, dt \int_0^{\infty} |q(t)|^2 dt$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} |q(t)|^2 dt\right)(2a)^{-\frac{2}{\lambda}(\mu x+\delta)}\Gamma\left(\frac{2\mu}{\lambda}x + \frac{2\delta+1}{\lambda}\right).$$

Дефинираме за $z$ с $\mathrm{Re} z > -\frac{\delta+\frac{1}{2}}{\mu}$ функцията $\tilde{Q}(z)$ чрез

$$\tilde{Q}(z) = \frac{(2a)^{\frac{1}{\lambda}(\mu z+\delta)}Q(z)}{\left\{\Gamma\left(\frac{2\mu}{\lambda}z + \frac{2\delta+1}{\lambda} + \frac{1}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

От лема 1 следва тогава, че за $z = x + iy$ с $x \geqq 0$ е изпълнено неравенство от вида

$$|\tilde{Q}(z)| \leqq K\exp\left(\frac{\pi\mu}{2\lambda}|y|\right).$$

Да допуснем, че $Q(n) = 0$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогава и $\tilde{Q}(n) = 0$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$ и тъй като $\frac{\pi\mu}{2\lambda} < \pi$, от теоремата на Карлсон ([3], с. 195, 5.8.1) следва, че $\tilde{Q} \equiv 0$, т.е. $Q \equiv 0$ в полуравнината $\mathrm{Re} z > -\frac{\delta+\frac{1}{2}}{\mu}$. Но тогава $Q^* \equiv 0$ в полуравнината $\mathrm{Re} z > -\frac{1}{2}$ и от (9) получаваме, че

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q^*(u)|^2 du = 0.$$

Това води до извода, че функцията $q^* \sim 0$ (т.е. е почти навсякъде равна на нула в интервала $(-\infty, +\infty)$, а следователно и $q \sim 0$ в интервала $(0, +\infty)$.

Забележка. Твърдението на лема 2 е валидно и за по-общата система от функции $\left\{E(t)t^{\mu n+\delta}\right\}_{n=0}^{\infty}$ ($\mu > 0$, $\delta > -\frac{1}{2}$) при условие, че $E$ е измерима и съществуват $A > 0$, $a > 0$ и $\lambda > 2\mu$, такива че

$$|E(t)| \leqq A \exp\left(-at^{\lambda}\right)$$

за $t \in (0, +\infty)$ и освен това $E(t) \neq 0$ почти навсякъде в интервала $(0, +\infty)$.

**3. Пълнота в $L_2(-\infty, +\infty)$ на системата**

$$\{W_\sigma(\omega n, t)\}_{n=0}^{\infty}. \tag{10}$$

Теорема. Системата (10) е пълна в пространството $L_2(-\infty, +\infty)$, ако $0 < \omega < \frac{4}{3}$ и $\mathrm{Re}\sigma > -\frac{1}{2}$.

*Доказателство.* Нека комплексната функция $h \in L_2(-\infty, +\infty)$. Дефинираме за $z$ с $\mathrm{Re} z > -\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\sigma$ функцията

$$H_\sigma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\sigma(z,t)h(t)\,dt.$$

От (3) следва, че

$$H_\sigma(z) = \cos\frac{\pi(z+\sigma)}{2}\int_0^\infty U_\sigma(z,t)\varphi(t)\,dt + \sin\frac{\pi(z+\sigma)}{2}\int_0^\infty V_\sigma(z,t)\psi(t)\,dt,$$

където $\varphi(t) = h(t) + h(-t)$ и $\psi(t) = h(t) - h(-t)$. Очевидно всяка от функциите $\varphi$ и $\psi$ е от пространството $L_2(0, +\infty)$.

От теорията на преобразуванието на Фурие в пространството $L_2(0, +\infty$ и в частност от съответната теорема на Планшерел ([4], с. 64-65, теорема 2.3) следва съществуването на функции $f$ и $g$ от това пространство, такива че

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\infty \left| f(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\lambda \cos tu\,\varphi(t)\,dt\right|^2 du = 0,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\infty \left| g(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\lambda \sin tu\,\psi(t)\,dt\right|^2 du = 0,$$

Също така са изпълнени и равенствата

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\infty \left| \varphi(t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\lambda \cos tu\, f(u)\,du\right|^2 dt = 0, \tag{11}$$

$$(12) \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^\infty \left| \psi(t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda \sin tu\, g(u)\, du \right|^2 dt = 0.$$

Дефинираме за $z$ с $\mathrm{Re} z > -\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\sigma$ функцията $\tilde{H}_\sigma$ чрез

$$\tilde{H}_\sigma(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos\frac{\pi(z+\sigma)}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^{z+\sigma} f(u)\, du \right.$$

$$\left. + \sin\frac{\pi(z+\sigma)}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^{z+\sigma} g(u)\, du \right\}.$$

Фактически $\tilde{H}_\sigma \equiv H_\sigma$. За да се убедим в това, дефинираме за $0 < \lambda < +\infty$ функцията $H_{\sigma,\lambda}$ чрез

$$H_{\sigma,\lambda}(z) = \int_{-\lambda}^{\lambda} W_\sigma(z,t) h(t)\, dt$$

$$= \cos\frac{\pi(z+\sigma)}{2} \int_0^\lambda U_\sigma(z,t)\varphi(t)\, dt + \sin\frac{\pi(z+\sigma)}{2} \int_0^\lambda V_\sigma(z,t)\psi(t)\, dt.$$

Ако означим

$$f_\lambda(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda \cos tu\varphi(t)\, dt,$$

$$g_\lambda(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda \sin tu\psi(t)\, dt,$$

след размяна на реда на интегриранията получаваме, че

$$H_{\sigma,\lambda}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos\frac{\pi(z+\sigma)}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^{z+\sigma} f_\lambda(u)\, du \right.$$

$$\left. + \sin\frac{\pi(z+\sigma)}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^{z+\sigma} g_\lambda(u)\, du \right\}.$$

Тогава

$$\left| \tilde{H}_\sigma(z) - H_{\sigma,\lambda}(z) \right|$$

$$\leqq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\left|\cos\frac{\pi(z+\sigma)}{2}\right|\left|\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)u^{z+\sigma}(f(u)-f_\lambda(u))\,du\right|\right.$$

$$\left.+\left|\sin\frac{\pi(z+\sigma)}{2}\right|\left|\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)u^{z+\sigma}(g(u)-g_\lambda(u))\,du\right|\right\}$$

Но

$$\left|\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)u^{z+\sigma}(f(u)-f_\lambda(u))\,du\right|^2$$

$$\leqq \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)u^{2(x+\mathrm{Re}\sigma)}\,du\int_0^\infty |f(u)-f_\lambda(u)|^2du,$$

$$\left|\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)u^{z+\sigma}(g(u)-g_\lambda(u))\,du\right|^2$$

$$\leqq \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)u^{2(x+\mathrm{Re}\sigma)}\,du\int_0^\infty |g(u)-g_\lambda(u)|^2du.$$

Следователно за $z$ с $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\sigma$ е изпълнено $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} H_{\sigma,\lambda}(z) = \tilde{H}_\sigma(z)$. Но, от друга страна, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} H_{\sigma,\lambda}(z) = H_\sigma(z)$ и следователно

$$H_\sigma(z) = \cos\frac{\pi(z+\sigma)}{2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)u^{z+\sigma}f(u)\,du$$

$$+\sin\frac{\pi(z+\sigma)}{2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)u^{z+\sigma}g(u)\,du.$$

От горното представяне може да се заключи, че функцията $H_\sigma(z)$ е холоморфна в полуравнината $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\sigma$ и освен това, че в полуравнината $\mathrm{Re}z \geqq 0$ е в сила неравенство от вида ($L=$const)

$$|H_\sigma(z)| \leqq L\left\{\Gamma\left(x+\mathrm{Re}\sigma+\frac{1}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\pi|y|}{2}\right) \tag{13}$$

Наистина съществува константа $B = B(\sigma) > 0$, такава че за всяко $z = x+iy$ са изпълнени неравенствата

$$\left|\cos\frac{\pi(z+\sigma)}{2}\right| \leqq B\exp\left(\frac{\pi|y|}{2}\right)$$

$$\left|\sin\frac{\pi(z+\sigma)}{2}\right| \leqq B\exp\left(\frac{\pi|y|}{2}\right)$$

Неравенството на Шварц за $z$ с $\mathrm{Re}z \geqq 0$ дава

$$\left|\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^{z+\sigma} f(u)\,du\right|^2$$

$$\leqq \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^{2(x+\mathrm{Re}\sigma)}\,du \int_0^\infty |f(u)|^2 du = \frac{1}{2}\Gamma\left(x+\mathrm{Re}\sigma+\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty |f(u)|^2 du$$

и аналогично

$$\left|\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^{z+\sigma} g(u)\,du\right|^2$$

$$\leqq \frac{1}{2}\Gamma\left(x+\mathrm{Re}\sigma+\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty |g(u)|^2 du.$$

Ако дефинираме $L$ чрез

$$L = \frac{B}{2\sqrt{2}}\max\left\{\left(\int_0^\infty |f(u)|^2 du\right)^{\frac{1}{2}};\left(\int_0^\infty |g(u)|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

получаваме неравенството (13).

Дефинираме функцията $H_\sigma^*$ в полуравнината $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\sigma$ чрез

$$H_\sigma^*(z) = \frac{H_\sigma(z)}{\{\Gamma(x+\mathrm{Re}\sigma+1)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

От лема 1 тогава следва, че ако $\omega > 0$, в полуравнината $\mathrm{Re}z \geqq 0$ е изпълнено неравенството ($M = LA^{\frac{1}{2}}$)

$$|H_\sigma^*(\omega z)| \leqq M\exp\left(\frac{3\pi\omega}{4}|y|\right) \tag{14}$$

Да допуснем, че $\omega < \frac{4}{3}$ и че

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\sigma(\omega n, t)h(t)\,dt = 0$$

за всяко $n = 0, 1, 2, \ldots$ Това води до $H_\sigma^*(\omega n) = 0$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$ От (14) и от теоремата на Карлсон следва, че $H_\sigma^* \equiv 0$, а тогава и $H_\sigma \equiv 0$ в полуравнината $\mathrm{Re}z > -\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\sigma$.

Каквото и да е $n = 0, 1, 2, \ldots$, точката $2n - \sigma$ е от тази полуравнина, тъй като $2n > -\frac{1}{2}$ за всяко $n = 0, 1, 2, \ldots$ От $H_\sigma(2n - \sigma) = 0$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$ следва, че

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^{2n} f(u)\, du = 0 \tag{15}$$

за $n = 0, 1, 2, \ldots$ и съгласно лема 2 функцията $f \sim 0$ в интервала $(0, +\infty)$.

Аналогично равенствата $H_\sigma(2(n + \frac{1}{2}) - \sigma) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ или все едно

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) u^{2n+1} g(u)\, du = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

водят до заключението, че $g \sim 0$ в $(0, +\infty)$. Но тогава следва, че всяка от функциите $\varphi$ и $\psi$ е почти навсякъде равна на нула в интервала $(0, +\infty)$, тъй като (11) и (12) водят до равенствата

$$\int_0^\infty |\varphi(t)|^2 dt = \int_0^\infty |\psi(t)|^2 dt = 0.$$

От равенствата $2h(t) = \varphi(t) + \psi(t)$ и $2h(-t) = \varphi(t) - \psi(t)$, които са изпълнени за всяко $t \in (0, +\infty)$, следва, че $h \sim 0$ в интервала $(-\infty, +\infty)$.

Частният случай $\omega = 1$ и $\sigma = 0$ води до пълнотата в пространството $L_2(-\infty, +\infty)$ на системата (1), от която, както вече беше изтъкнато, следва пълнотата в същото пространство на системата функции на Ермит (2).

При $\omega = 1$ и $\sigma = k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ получаваме, че системата

$$\left\{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) H^*_{n+k}(t)\right\}_{n=0}^\infty,$$

или все едно системата

$$\left\{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) H_{n+k}(\frac{t}{\sqrt{2}})\right\}_{n=0}^\infty,$$

е също пълна в пространството $L_2(-\infty, +\infty)$. Този последен извод е може би неочакван, тъй като каквото и да е $k = 1, 2, 3, \ldots$, системата

$$\left\{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) H_{n+k}(t)\right\}_{k=0}^\infty$$

не е пълна в $L_2(-\infty, +\infty)$ - тя е истинска част от системата функции на Ермит.

З а б е л е ж к а. При доказателството на пълнотата на системата (10) в пространството $L_2(-\infty, +\infty)$ всъщност бяха използвани два частни случая на лема 2, съгласно които от равенствата (15), респ. (16) следва, че $f \sim 0$, респ. $g \sim 0$ в интервала $(0, +\infty)$. Последните заключения могат да бъдат направени и без да се привлича лема 2, а именно като се прибегне до теоремата за единственост на класическото преобразувание на Фурие, както например при доказателството на твърдението от с. 431 на [5]. Ще изтъкнем обаче, че лема 2 изобщо не може да бъде доказана по "маниера" на доказателството на току-що споменатото твърдение и в частност това е така, когато $\frac{\lambda}{\mu} < 1$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Бейтман, Г., А. Ердейй. Высшие трансцендентные функции. М., I, 1973; II, 1974.
2. Градштейн, И. С., И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.
3. Тичмарш, Е. Теория функций. М., 1980.
4. Джрбашян, М. М. Интегральные преобразувания и представления функций в комплексной области. М., 1966.
5. Колмогоров, А. Н., С. В. Фомин. Елементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
6. Doetsch, G. Handbuch der Laplace-Transformation.I, Basel, 1950.


Постъпила на 27.I.1989 г.