ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 1 — Математика

Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 1 — **Mathématiques**

Tome 82, 1988

ВЪРХУ ПРАВОМЕРНОСТТА НА МЕТОДИТЕ С ДИФЕРЕНЦИАЛНИ И ДИФЕРЕНЧНИ МЕТОДИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА УСТОЙЧИВОСТТА НА БЕЗНАСТАВОВ РЕЛСОВ ПЪТ

АТАНАС СМИЛЯНОВ, ЦВЕТАН МИТРОВ

Атанас Смилянов, Цветан Митров. О ПРАВОМЕРНОСТИ МЕТОДОВ С ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ И ДИФЕРЕНЧНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ БЕЗНАСТАВНОГО РЕЛЬСОВОГО ПУТИ. **Задача исследования устойчиности рельсового пути существует очень давно. Известны более 100 теоретических методов. В работе проводится сравнение между диференциалными и диференчными методами.**

Atanas Smilijanow, Zvetan Mitrov. ON THE CORRECTNESS OF DIFFERENTIAL AND DIFFÉRENCE METHODS FOR ANALYSIS OF THE STABILITY OF CONTINUOUS RAIL WAYS. **The problem of the rail ways stability exists for a long time and there are about 100 theoretical methods to solve it. In this paper the connection between differential and difference methods is discussed.**

Задачата за изследване на устойчивостта на безнаставовия релсов път е известна отдавна в железопътната практика. Създадените методи за решаването ѝ се основават на различни изходни предпоставки. Това предопределя голямото разнообразие от физически постановки и механоматематически модели [1]. Големият брой съществуващи методи за теоретично решение — над 100, позволява да се прави съпоставително изследване с цел класификация и прогнозиране на направленията, в които би могло да се очаква поява на нови теоретични модели [1].

Сред намерилите приложение в практиката особен интерес представляват методите, свеждащи физическата постановка на задачата до заменяне на релсотраверсовата скара с безкрайно дълъг прът (заместваща греда). Характерното е, че изходните предпоставки предполагат при еднакви натоварвания с реалния случай заместващата греда да дава същите деформации (завъртания и премествания), както и изследваната релсотраверсова решетка. Обикновено взаимодействието между релсите и траверсите се отчита чрез съпротивлението срещу взаимното завъртане на траверсата спрямо релсата в даден възел. При това моментите във възлите се приемат за пропорционални на завъртането, а действието им (във възлите) се разпределя по цялата дължина на приетата заместваща греда ([2], [3], [4] и др.).

Типичен и много популярен представител е моделът, разработен от Леви [5]. Свежда се до решение на диференциално уравнение от типа

$$y^{IV} + Ay'' + Cy = 0 \tag{1}$$

с гранични условия съгласно (2):

$$\begin{aligned} y(0) &= 0; \quad y(l) = 0, \\ y''(0) &= 0; \quad y''(l) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Някои по-нови изследвания оспорват коректността на физическата постановка, водеща до математически модели от типа на уравнения (1) и (2). Известни са модели, които ползват различен по сложност математически апарат за отчитане рамковидното действие на релсотраверсовата скара и реактивното въздействие на баластовото легло. Типичен в това отношение е разработеният в БДЖ метод [6]. Той отдава изключително голямо значение на изходните предпоставки с оглед максимално възможно доближаване на механоматематическия модел до реалната физическа задача. Тези основни предпоставки са:

— железният път се разглежда като безкрайно дълга рамка с деформируеми възли, положена в еластична среда. Силите от тази среда се предават върху рамката само чрез траверсите;

— всяка траверса при огъването си се третира като греда върху еластична основа;

— при напречните премествания на скарата силите от баластовото легло се приемат като съсредоточени върху челата на траверсите;

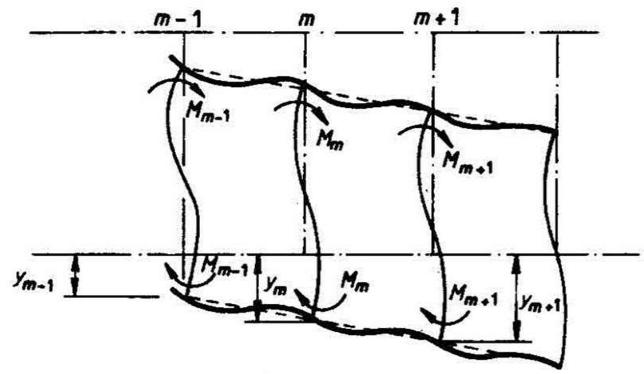
— еластичната система, с която се заменя пътят и първоначално е подложена само на действието на надлъжните натискови сили в релсите, се разглежда в равновесие при такова деформирано състояние, което се отличава от първоначалното с наличие на безкрайно малки деформации от нов вид;

— силите, въздействащи на релсотраверсовата скара, се възприемат по схемата на фиг. 1, а разрезните усилия, поддържащи системата в равновесие — по схемата на фиг. 2.

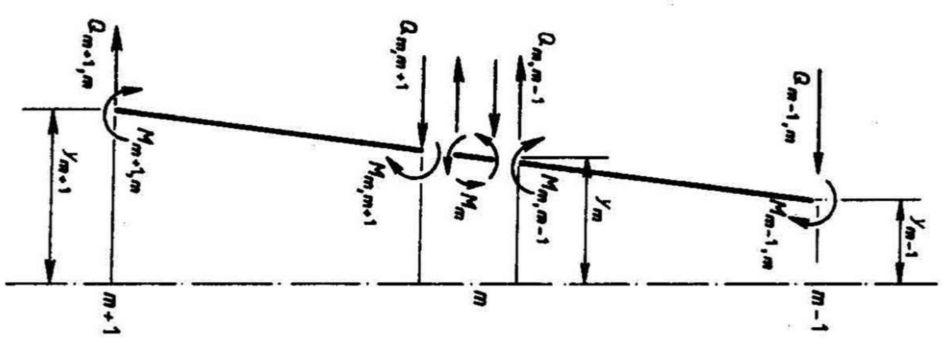
От условията за:

— взаимното завъртане между релсовия път $m-1, m$ и траверсата m, m;

— взаимното завъртане между релсовия път $m-1, m$ и траверсата $m-1, m-1$;



Фиг. 1



Фиг. 2

— равновесие на моментите във възел m;
— равновесие на напречните сили във възел m;
се извежда математическият модел на развития в [6] метод. Той се свежда до системата от диференчни уравнения

$$
(3) \qquad \left\| \begin{array}{l} f_0 M_{m-1} + f_1 M_m + f_0 M_{m+1} + Y_{m-1} - Y_{m+1} = 0 \\ M_{m-1} - M_{m+1} + g_0 Y_{m-1} - g_1 Y_m + g_0 Y_{m+1} = 0, \end{array} \right.
$$

където:

$$
\begin{aligned}
f_0 &= k\ell \frac{\nu - \sin\nu}{\nu(1-\cos\nu)}; \\
f_1 &= \ell \frac{\nu(2ki_{\text{p}} - 1)\sin\nu - 2(ki_{\text{p}}\nu^2 + 1)\cos\nu + 2}{i_{\text{p}}\nu^2(1-\cos\nu)}; \\
g_0 &= \frac{\nu(1-\cos\nu)}{k\ell\sin\nu}; \\
g_1 &= \frac{\nu(2\nu^2 i_{\text{p}} - \frac{B\ell^2}{2})(1+\cos\nu) + B\ell^2\sin\nu}{k\ell i_{\text{p}}\nu^2\sin\nu};
\end{aligned}
$$

M_m — моментът в сечение m на скарата;
Y_m — преместване в сечение m на скарата;

$$
\begin{aligned}
i_p &= \frac{E_{\text{p}} I_{\text{p}}}{\ell}; \\
\nu^2 &= \frac{F\ell^2}{E_{\text{p}} I_{\text{p}}};
\end{aligned}
$$

$E_{\text{p}}, I_{\text{p}}, E_{\text{тр}}, I_{\text{тр}}$ — модули на еластичност и инерционен момент на релсата и траверсата спрямо вертикалната ос;

$$
K = \frac{K_1}{6i_{\text{тр}}} + \bar{\eta};
$$

η — взаимното завъртане между релсата и траверсата, причинено от момент, числено равен на единица и действащ в скарата на мястото на свързването на релсата с траверсата;

$$
i_{\text{тр}} = \frac{E_{\text{тр}} I_{\text{тр}}}{\ell_{\text{тр}}};
$$

$$
K_1 = \frac{3}{\omega\ell_{\text{тр}}} - (\text{sh}\omega\ell_{\text{тр}} - \sin\omega\ell_{\text{тр}})(\text{ch}^2\omega\ell + \cos^2\omega\ell)\left[(\text{sh}\omega\ell_{\text{тр}} - \sin\omega\ell_{\text{тр}})\right.
$$

$$
\left.\times\, (\text{sh}\omega\ell\text{ch}\omega\ell - \sin\omega\ell\cos\omega\ell) + (\text{ch}\omega\ell_{\text{тр}} - \cos\omega\ell_{\text{тр}})(\text{ch}^2\omega\ell_{\text{тр}} + \cos^2\omega\ell_{\text{тр}})\right]^{-1};
$$

$$
\omega = \sqrt{\frac{C}{4E_{\text{тр}} I_{\text{тр}}}};
$$

C — коефициент на съпротивление на баластовото легло срещу изместване на траверсите надлъжно на железния път.

Моделът с диференчни уравнения от [6] е безусловно един връх в развитието на теорията на устойчивостта на безнаставовия релсов път. Той дава интересно, а от техническа гледна точка дори елегантно решение. Получените резултати са с точност, задоволяваща изискванията на практиката. Не случайно върху него е основана цялата практическа организация на полагането и поддържането на безнаставов релсов път у нас - норми, инструкции и пр. Но разработеният метод има и някои слаби страни. Например задоволяващата изискванията на практиката точност на теоретичното решение и обосноваваните върху него норми в хронологичен порядък са създали условия на тях да се гледа като на предел на теоретичните възможности. Поради това години наред не са търсени нови, по-мощни теоретични решения. Нещо повече, на работата в тази посока се гледа като на икономически и практически никому ненужно задълбочаване в теорията, т.е. като на своеобразна еклектика.

В същото време, подложено на строг съпоставителен анализ спрямо други теоретични модели, решението от [6] не издържа на посочените претенции. Това е така, защото, от една страна, то е основано на сравнително сложен математически апарат и, от друга страна, претенциите му за по-голяма точност на резултатите могат да бъдат поставени под съмнение. Това твърдение се доказва чрез възможността моделът от [3] да се преобразува по математичен път в модел, състоящ се от едно диференциално уравнение от вид и ред, идентични с вида и реда на уравнение (1).

За целите на доказателството се разсъждава по следния начин:

Допуска се, че:

— координатата x се мени по дължината на релсовотраверсовата скара. Тогава точките m_i от модела по [6], изобразен с фиг.1 и фиг.2, могат да се означават с $x_{m_i}(x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots)$;

— съществуват функциите $M(x)$ и $Y(x)$, с които могат да се изразят моментите и преместванията в релсотраверсовата скара и които са най-малко четири пъти диференцируеми.

Тогава може да се въведе означението

$$\begin{aligned} M(x_m) &= M_m, \\ Y(x_m) &= Y_m. \end{aligned} \tag{4}$$

Функциите (4) могат да се разложат по формулата на Тейлор до втори ред в точката x_m:

$$\begin{aligned} M(x) = M(x_m) \quad &+ \quad (x - x_m)M'(x_m) \\ &+ \quad \tfrac{(x-x_m)^2}{2} M''(x_m) + O\left[(x - x_m)^2\right], \\ Y(x) = Y(x_m) \quad &+ \quad (x - x_m)Y'(x_m) \\ &+ \quad \tfrac{(x-x_m)^2}{2} Y''(x_m) + O\left[(x - x_m)^2\right], \end{aligned} \tag{5}$$

където:

$$(6) \qquad \begin{aligned} O[(x-x_m)^2] &= \alpha(x-x_m)(x-x_m)^2 \\ \text{и } \alpha(x-x_m) &\to 0 \text{ при } x \to x_m. \end{aligned}$$

Ако X заеме стойностите X_{m-1} и X_{m+1}, се получава съответно:

$$(7) \qquad \begin{aligned} M_{(x=x_{m-1})} = M(x_m) &+ (x_{m-1}-x_m)M'(x_m) \\ &+ \frac{(x_{m-1}-x_m)^2}{2}M''(x_m) + O\left[(x_{m-1}-x_m)^2\right], \\ M_{(x=x_{m+1})} = M(x_m) &+ (x_{m+1}-x_m)M'(x_m) \\ &+ \frac{(x_{m+1}-x_m)^2}{2}M''(x_m) + O\left[(x_{m+1}-x_m)^2\right], \\ Y_{(x=x_{m-1})} = Y(x_m) &+ (x_{m-1}-x_m)Y'(x_m) \\ &+ \frac{(x_{m-1}-x_m)^2}{2}Y''(x_m) + O\left[(x_{m-1}-x_m)^2\right], \\ Y_{(x=x_{m+1})} = Y(x_m) &+ (x_{m+1}-x_m)Y'(x_m) \\ &+ \frac{(x_{m+1}-x_m)^2}{2}Y''(x_m) + O\left[(x_{m+1}-x_m)^2\right]. \end{aligned}$$

Като се отчете, че ℓ е насочена дължина, т.е.

$$(8) \qquad -\ell = x_{m-1} - x_m \qquad \text{и} \qquad +\ell = x_{m+1} + x_m,$$

и след умножаване на първите две уравнения от (7) с f_0 и f_1, както и след извършване на известни математически преобразувания от (3) и (7) се получава

$$(9) \qquad f_0\ell^2 M''(x_m) + M(x_m)(2f_0 + f_1) - 2\ell Y'(x_m) + O(\ell^2) = 0.$$

Аналогично от уравнения (3) и (7) се получава второ уравнение

$$(10) \qquad g_0\ell^2 Y''(x_m) + Y(x_m)(2g_0 - g_1) - 2\ell M'(x_m) + O(\ell^2) = 0.$$

Уравнения (9) и (10) образуват системата

$$(11) \qquad \left\| \begin{aligned} &\ell^2 g_0 Y''(x_m) - 2\ell M'(x_m) + Y(x_m)(2g_0 - g_1) + O(\ell^2) = 0 \\ &\ell^2 f_0 M''(x_m) - 2\ell Y'(x_m) + M(x_m)(2f_0 + f) + O(\ell^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ако се въведе нова променлива

$$(12) \qquad z = \ell x$$

и се пропусне остатъкът, отбелязан с $O(\ell^2)$ като нямащ съществено влияние върху точността на крайния резултат, може да се пристъпи към разглеждане на системата диференциални уравнения

$$(13) \qquad \left\| \begin{aligned} &Y''(z)g_0 - 2M'(z) + (2g_0 - g_1)Y(z) = 0 \\ &M''(z)f_0 - 2Y'(z) + (2f_0 + f_1)M(z) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ако първото уравнение от системата (13) се диференцира два пъти, а второто - един път, получават се уравненията

$$g_0 Y^{IV}(z) + (2g_0 - g_1)Y''(z) - 2M'''(z) = 0, \tag{14}$$

$$f_0 M'''(z) - 2Y''(z) + (2f_0 + f_1)M'(z) = 0. \tag{15}$$

От (15) може да се изрази $M'''(z)$ и да се замести в (14). Получава се ново уравнение. Условно може да се отбележи с E. Ако от първото уравнение на системата (13) се изрази $M'(z)$ и се замести в E, получава се съвършено ново уравнение

$$Y^{IV} + aY'' + bY = 0, \tag{16}$$

където:

$$a = \frac{4g_0 f_0 + g_0 f_1 - f_0 g_1 - 4}{f_0 g_0}, \qquad b = \frac{(2g_0 - g_1)(2f_0 + f_1)}{f_0 g_0}. \tag{17}$$

Уравнение (16) по вид и ред се идентифицира с уравнение (1). С това възможността за преход от модел с диференчни уравнения към модел с диференциални уравнения е доказана. По аналогичен път може да се извърши и обратният преход - от модел с диференциални уравнения от типа (1) към модел с диференчни уравнения от типа (3).

От приведеното доказателство могат да се направят различни изводи. Най-съществените от тях се свеждат до:

— Моделите, основани на диференциални уравнения, съдържат в себе си моделите с диференчни уравнения. Последните са само частен случай от решението с диференциални уравнения.

— По-съвършена постановка на физическия модел на решаваната задача е с ограничителни гранични условия. Това е така, защото за да се реши задачата, е необходимо безнаставовият релсов път да се третира като крайна по размери скара с някаква дължина ℓ и извън този краен размер състоянието на пътя и промените в температурата не влияят на устойчивостта в разглеждания участък. В контекста на това например физическият смисъл от въвеждането на граничните условия (2) за модела (1) с най-грубо приближение е, че преместването и ускорението в началото и края на участъка е нула.

— Изложеното в горните изводи и приведеното математическо доказателство за преход на модела (3) в (1) позволяват да се очаква създаване на принципно ново теоретично решение. Може да се прогнозира, че то би обединило идеологията на модела (1) - изследване на глобалното поведение на безнаставовия път при загуба на устойчивост, с възможностите на модела (3) - информация за локалното поведение на безнаставовата конструкция в отделни възли. Това ново решение би съчетало предимствата и на двата метода и би позволило ползуване на съвременни числени методи и електронноизчислителна техника.

И накрая един извод с по-дълбоко методологическо значение:

Приведеното доказателство не отрича достойнствата на разработения в [6] метод. То обаче потвърждава, макар и по косвен начин, известната максима, че авторитарните мнения в науката могат най-много да задържат, но не могат да спрат въобще развитието на нови, по-съвършени и по-съвременни решения. За конкретния пример това се оказва вярно дори и за случай, при който практиката е удовлетворена от постигнатото равнище на теорията и не стимулира търсене и създаване на нови теоретични решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смилянов, Ат. Съображения върху съществуващите методи за изследване устойчивостта на безнаставовия релсов път. – Годишник на ВИАС, свитък "Транспортно строителство", С., 1988.
2. Levi, R. Influence de la sigidive transversale de la voie sur le risque de deformation par compression longitudinal. – Genie civil, Nr. 3448, 1957.
3. Сакмауер, Л. Теоретическое исследование бесстыкового пути при разных способах и системах верхнего строения полотна в ЧССР. – Исследовательский институт железнодорожного транспорта, Братислава, 1958/65.
4. Першин, С. Методы расчета устойчивости бесстыкового пути. Путь и путевое хозяйство. – МИИТ, вып. 147, М., 1962.
5. Levi, R. Les deplaments longitudinaux des rails et les deformations de la voie. – Genie civil, Nr. 2610, 1959.
6. Вълчев, Д. Нов метод за изследване устойчивостта на безнаставовия релсов път. – Годишник на НИИТ, ДИ"Техника", С., 1961.

Получена на 28. X. 1988 г.