ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 83, 1989

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 83, 1989

# О НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВЯЗЯМИ

СОНЯ ДЕНЕВА

*Соня Денева.* О НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВЯЗЯМИ. В работе выведены уравнения движения нелинейных неголономных систем. Рассмотрены два примера применения этих уравнений.

*Sonia Deneva.* NONHOLONOMIC SYSTEMS WITH NONLINEAR CONNECTIONS. In this paper new equations of motion for nonholonomic nonlinear sistems are derived and two problems are solved as an illustration of the equations.

Механика нелинейных неголономных систем возникла в начале XX века благодаря работам П. Аппеля [1, 2, 3] и Е. Делассю [4, 5, 6], которые подробно исследовали такие системы. Первые сведения о нелинейной механике относятся к концу XIX-ого века. Одна из первых известных работ в этом направлении — статья И. В. Мещерского [7], в которой он показал, что в аналитической механике могут рассматриваться движения материальной точки при существовании конечны связей, но и дифференциальных связей произвольного порядка.

И. В. Мещерский очень подробно рассмотрел дифференциальные связи первого порядка, считая, что они могут осуществляться с помощью среды, воздействующей на точку, находящуюся в ней. Он вывел уравнения движения материальной точки с такой связью и дал два примера, в которых связи осуществляются при помощи шероховатой поверхности, а реакциями связей являются силы трения. В 1911 году примеры механических систем с нелинейными неголономными связями были данны П. Аппельем [1] и Е. Делассю [4]. В 1936 году А. Белимович [8] рассмотрел принципиально новый пример нелинейных неголономных систем, основанный на автоматическом регулировании скорости материальной точки. В последнее время в связи с развитием автоматики проявляется все больший интерес к нелинейной неголономной механике. Многие авторы как L. Castaddi [9], Г. С. Погасов [10], A. Melis [11], В. Новоселов [12] дают примеры таких систем, которые имеют более методологическое, чем практическое значение. Но можем быть уверенными, что в управляемых системах, в теории автоматического регулирования и в других вопросах современной техники механика нелинейных неголономных связей найдет широкое применение [13]. Отметим, что особое развитие теории нелинейных неголономных задач получила в работах И. Ценовой [14, 15] и Б. Долапчиева [16].

В настоящей работе сделан короткий обзор некоторых дифференциальных уравнений движения нелинейных неголономных систем. Рассмотрены уравнения Раута [12] для неголономных нелинейных систем первого и второго порядка. На основе принципов Журдена и Гаусса в независимых вариациях выведены уравнения движения без множителей Лагранжа. Эти уравнения совпадают с уравнениями типа Чаплыгина, данными в [15], но имеют более простую для применения форму. Вышеупомянутые уравнения применены к двумя примерам и сведены к квадратурам. При этом к первому примеру применены как уравнения Раута, так и уравнения без множителей Лагранжа.

1. Уравнения Раута для неголономных нелинейных систем первого и второго порядка.

Пусть движение механической системы определяется $l$ параметрами, т. е.

$$(1) \qquad r_j = r_j(t,\ q_i) \qquad (i = 1, \dots,\ l;\ j = 1, \dots,\ n).$$

Между параметрами системы существуют связи

$$(2) \qquad f_\rho(t,\ q_i,\ \dot{q}_i) = 0 \qquad (\rho = 1, \dots,\ d),$$

которые вообще говоря нелинейными. Как следствия из (2) при варьировании только обобщенных скоростей получим

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = 0 \qquad (\rho = 1, \dots,\ d).$$

Для вывода уравнения движения исходим из принципа Журдена, согласно которому

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{n}(-m_j\ddot{r}_j + F_j)\delta r_j = 0,$$

где $F_j$ силы, действующие на систему. Отметим, что принцип (4) записан в предположении, что

$$\sum_{j=1}^{n} R_j \delta \dot{r}_j = 0, \tag{5}$$

т. е. связи (2) идеалны по отношению принципа Журдена. Для конкретных примеров покажем, что реакции связей (2) удовлетворяют (5). Из (1) имеем

$$\dot{r}_j = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial r_j}{\partial t}, \tag{6}$$

откуда, варьируя скорости, получаем

$$\delta \dot{r}_j = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \delta \dot{q}_i. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (4), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{l} \left\{ \sum_{j=1}^{l} \left( -m_j \ddot{r}_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} + F_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \right) \right\} \delta \dot{q}_i = 0. \tag{8}$$

Доказано, что [14]

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{r}_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{r}_j \frac{\partial \dot{r}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_i},$$

где

$$T = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j r_j^2}{2} \tag{9}$$

кинетическая энергия системы. Отсюда (7) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{l} \left\{ -\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} + 2 \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right\} \delta \dot{q}_i, \tag{10}$$

где

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} F_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \tag{11}$$

обобщенные силы, действующие на систему. Последние можно определить как коэффициенты перед вариациями обобщенных координат в выражении для виртуальной работы. Имеем

$$\delta A = \sum_{j=1}^{n} F_j \partial r_j = \sum_{i=1}^{l} \left( \sum_{j=1}^{n} F_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \tag{12}$$

Из сравнения (11) и (12) следует вышеупомянутое утверждение. Если силы, действующие на точки систем $F_j$, консервативны, то выполняются соотношения

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \tag{13}$$

где $U$ — силовая функция. Умножая (3) на множителы — $\lambda_\rho$, суммируя по $\rho$ и прибавляя к (10), получаем

$$\sum_{i=1}^{l} \left\{ -\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} + 2\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i + \sum_{\rho=1}^{d} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_i} \right\} \delta \dot{q}_i = 0. \tag{14}$$

Из (3) видно, что $d$ вариации $\delta \dot{q}_i$ зависимы и соответно $l-d$ независимы. Выбираем множители $\lambda_\rho$ так, чтобы коэффициенты в (14) перед зависимыми вариациями координат $\partial \dot{q}_i (i = d+1, \ldots, l)$ обратились в нули. Тогда, так как остальные вариации $\delta \dot{q}_i (i = 1, \ldots, d)$ независимы, из (14) находим

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{\rho=1}^{d} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, l). \tag{15}$$

Уравнения (15) в [14] выведены в форме Нильсона. Легко доказать на основе (9), что имеем

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

откуда уравнения (15) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{\rho=1}^{d} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, l). \tag{16}$$

К уравнениям (16) добавляем (2), так что имеем $l+d$ уравнения с $l+d$ неизвестными $q_i$, $\lambda_\rho$. Эти уравнения очевидно имеют место для нелинейных связей первого порядка.

Рассмотрим и нелинейные неголономные связи второго порядка. В этом случае будем иметь зависимости вида

$$f_\rho(t, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) = 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, d;\ i = 1, \ldots, l). \tag{17}$$

Варьируя только обобщенные ускорения, из (17) получаем

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f_\rho}{\partial \ddot{q}_i} \delta \ddot{q}_i = 0 \qquad (\rho = 1, \dots, d). \tag{18}$$

Для вывода уравнения движения выходим из принципа Гаусса

$$\sum_{j=1}^{n} (-m_j \ddot{r}_j + F_j) \delta \ddot{r}_j = 0 \tag{19}$$

в предпболожении, что

$$\sum_{j=1}^{n} R_j \delta \ddot{r}_j = 0, \tag{20}$$

где $R_j$ реакция связей (17). Иными словами, предполагаем, что связи (17) идеальны по отношению к принципу Гаусса. Из (6) получаем

$$\ddot{r}_j = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \cdots, \tag{21}$$

где многоточие означает члены, не содержащие $\ddot{q}_i$. Из (21) варьируя только ускорения, получаем

$$\delta \ddot{r}_j = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \delta \ddot{q}_i. \tag{22}$$

Подставляем (22) в (19), откуда находим

$$\sum_{i=1}^{l} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left( -m_j r_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} + F_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \right) \right\} \delta \ddot{q}_i = 0. \tag{23}$$

Из [14] имеем

$$\sum_{j=1}^{n} -m_j \ddot{r}_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - 3 \frac{\partial T}{\partial q_i} \right).$$

Тогда (23) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{l} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{3}{2} \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right) \delta \ddot{q}_i = 0. \tag{24}$$

Оперируя с вариациями (18), как и выше, получаем из (24) уравнения

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - \frac{3}{2} \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{\rho=1}^{d} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \ddot{q}_i} \qquad (i = 1, \dots, l). \tag{25}$$

Очевидно (25) — расширение уравнений Ценова для нелинейных неголономных связей второго порядка. Не трудно показать, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - \frac{3}{2}\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i},$$

откуда (25) принимает Лагранжевый вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{\rho=1}^{d} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \ddot{q}_i} \qquad (i = 1, \dots, l). \tag{26}$$

К (26) добавляем уравнения (17) и получаем систему из $l+d$ уравнений с $l+d$ неизвестными.

Отметим, что уравнения с множителями Лагранжа в форме Аппеля данны в [15], а именно

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i + \sum_{\rho=1}^{d} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \ddot{q}_i},$$

где $S$ энергия ускорения.

2. Уравнения без множителей Лагранжа для нелинейных неголономных систем первого и второго порядка.

Пусть как и выше движение механической системы определяется $l$ параметрами. Предполагается, что система (2) разрешима относительно части обобщенных скоростей, т. е. имеем

$$\dot{q}_\mu = F_\mu(t, q_i, \dot{q}_r) \qquad (\mu = k+1, \dots, l;\ r = 1, \dots, k), \tag{27}$$

где $k = l - d$ число независимых скоростей. Если ограничиться зависимостями (2), то как было показано выше, можно, исходя из принципа Журдена, получить уравнения Раута для нелинейных неголономных связей. Эти уравнения, однако, содержат множители Лагранжа, т.е. число неизвестных больше, чем число параметров. Здесь пользуясь связями (27), выведем уравнения движения в независимых скоростях. Будем исходит из принципа Журдена (4), и предположений (5). Используя заново зависимость

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{r}_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \dots, l),$$

приведем принцип Журдена к виду

$$\sum_{i=1}^{l} \left\{ -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right\} \delta \dot{q}_i = 0. \tag{28}$$

Варьируя (27) относительно обобщенных скоростей, получаем зависимости

$$\delta\dot{q}_\mu = \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial F\mu}{\partial \dot{q}_r}\delta\dot{q}_r \qquad (\mu = k+1, \ldots, l), \tag{29}$$

где $\delta\dot{q}_r$ независимые вариации. Записываем (28) в виде

$$\sum_{r=1}^{k}\left\{-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_r} + Q_r\right\}\delta\dot{q}_r + \sum_{\mu=k+1}^{l}\left\{-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_\mu} + Q_\mu\right\}\delta q_\mu = 0. \tag{30}$$

Вносим (29) в (30), после чего получаем

$$\sum_{r=1}^{k}\left\{-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_r} + Q_r\right\}\delta\dot{q}_r + \sum_{r=1}^{k}\left\{\sum_{\mu=k+1}^{l}\left\{-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\right)\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial T}{\partial q_\mu}\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{q}_r} + Q_\mu\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{q}_r}\right\}\delta\dot{q}_r\right\} = 0 \tag{31}$$

$$(r = 1, \ldots, \ k = l - d).$$

Изза того, что $\delta\dot{q}_r$ зависимые вариации, из (31) следуют уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) + \sum_{\mu=k+1}^{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\right)\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} - \sum_{\mu=k+1}^{l}\frac{\partial T}{\partial q_\mu}\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{q}_r} = Q_r + \sum_{\mu=k+1}^{l} Q_\mu\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{q}_r}, \tag{32}$$

$$(r = 1, \ldots, k).$$

Уравнения (32) и (27), число которых $l$, определяют вполне движение системы. Здесь отметим заново, что уравнения, подобные (32), данны [15], где названы уравнениями типа Чаплигина. В этой работе используется выражение для конетической энергии $\tilde{T}$, которое получается из $T$ после замены зависимых скоростей. В этом смысле (32) можно третировать как новую форму уравнений аналитической механики для неголономных нелинейных систем.

Аналогично для нелинейных неголономных систем второго порядка, на которые наложены связи вида

$$\ddot{q}_\mu = F_\mu(t, \ q_i, \ \dot{q}_i, \ \ddot{q}_r) \qquad (\mu = k+1, \ldots, \ l; \ r = 1, \ldots, \ k). \tag{33}$$

Применяя принципа Гаусса для идеальных связей, получаем уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)+\sum_{\mu=k+1}^{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\right)\frac{\partial F_\mu}{\partial \ddot{q}_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r} \tag{34}$$

$$-\sum_{\mu=k+1}^{l}\frac{\partial T}{\partial q_\mu}\frac{\partial F_\mu}{\partial \ddot{q}_r}=Q_r+\sum_{\mu=k+1}^{l}Q_\mu\frac{\partial F_\mu}{\partial \ddot{q}_r} \qquad (r=1,\dots,\ l-d).$$

Уравнения (34) совместно с (33) определяют движение системы.

В частном случае нелинейных неголономных систем первого порядка, для которых имеем (27), получается условие Пшеборского — Кочиной [17], [18] для вариаций координат

$$\delta q_\mu=\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{q}_r}\delta q_r \qquad (\mu=k+1,\dots,\ l). \tag{35}$$

Отметим, что используя (35), можно получить уравнения (32) для нелинейных неголономных систем и с помощью принципа Даламбера — Лагранжа.

3. Пример системы с нелинейными неголономными связями первого порядка.

Тело (например космический аппарат) движется под действием силы тяжести и управляющей силы $\mathbf{R}$ так, что центр масс тела имеет постоянную по величине скорость $\boldsymbol{v}$. В качестве параметров движения выбираем координаты $x$, $y$, $z$ центра масс $G$ тела и углы Эйлера $\phi$, $\theta$, $\psi$ для координатной системы, неизменно связанной с телом. Согласно теореме Кенига для кинетической энергии имеем

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2), \tag{36}$$

где $A$, $B$, $C$ главные моменты инерции тела и его масса. Соответственно $p$, $q$, $r$ — компоненты угловой скорости сферического движения тела вокруг его центр масс. Согласно условию для скорости $G$ имеем следующую нелинейную связь

$$f=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{m}{2}v^2=0, \tag{37}$$

где $v$ постоянная скорость.

Внешняя сила $\mathbf{P}=m\mathbf{g}$ консервативна и имеет силовую функцию

$$V=-mgz. \tag{38}$$

Применяя уравнения Раута (16) и имея в виду (36), (37) и (38), получаем

$$\ddot{x}=\lambda\dot{x}, \qquad \ddot{y}=\lambda\dot{y}, \qquad \ddot{z}=-g+\lambda\dot{z}, \tag{39}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\phi}\right)-\frac{\partial T}{\partial \phi}=0;\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\psi}\right)-\frac{\partial T}{\partial \psi}=0;\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=0.$$

Здесь $\lambda$ — множитель Лагранжа, соответствующий (37). На основе кинематических формул

$$\begin{aligned} p &= \dot\psi\sin\theta\sin\phi+\dot\theta\cos\phi,\\ q &= \dot\psi\sin\theta\cos\phi-\dot\theta\sin\phi,\\ r &= \dot\psi\cos\theta+\dot\phi \end{aligned}$$

не трудно получить из (39) эйлеровые динамические уравнения

$$\begin{aligned} A\dot p &- (B-C)gr=0,\\ B\dot q &- (C-A)rp=0,\\ C\dot r &- (A-B)pq=0. \end{aligned}\tag{40}$$

Очевидно (40) соответствуют случаю Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки. В случае, когда начальные угловые скорости $\dot\phi_0$, $\dot\psi_0$, $\dot\theta_0$ нули, уравнения (40) допускают только нулевое решение $p \equiv q = r = 0$, т. е. тело совершает трансляционное движение. В противном случае (40) имеют известное решение в эллиптических функциях.

Согласно (37) и (39) движение тела определяется из уравнений

$$\ddot x=\lambda\dot x,\qquad \ddot y=\lambda\dot y,\qquad \ddot z=-g+\lambda z,\qquad \dot x^2+\dot y^2+\dot z^2=v^2.\tag{41}$$

При условии, что $\dot x\neq 0$, $\dot y\neq 0$, из (41) находим

$$\frac{\ddot x}{\dot x}=\frac{\ddot y}{\dot y}=\lambda.\tag{42}$$

Из (42) следуют зависимости

$$\dot y=C_1\dot x,\qquad y=C_1x+C_2,\tag{43}$$

где $C_1$, $C_2$ — интеграционные константы, зависящие от начальных условий. Из (41) и (43) следует

$$\dot z=\varepsilon\sqrt{v^2-(C_1^2+1)\dot x^2},\tag{44}$$

где $\varepsilon=\pm1$ в зависимости от $\dot z_0>0$ или $\dot z_0<0$. Из (44) следует

$$\ddot z=-\frac{\varepsilon(C_1^2+1)\dot x\ddot x}{\sqrt{v^2-(C_1^2+1)\dot x^2}}.\tag{45}$$

Подставляя (45) и (44) в третьем уравнении (41), получаем

$$\frac{v^2\ddot x}{\dot x\sqrt{v^2-(C_1^2+1)\dot x^2}}=\varepsilon g.\tag{46}$$

После интегрирования (46) находим

$$
\dot{x} = \frac{2C_3 v e^{-\frac{\delta g}{v}t}}{1 + C_1^2 + C_3^2 e^{-\frac{2\delta g t}{v}}}. \tag{47}
$$

$C_3$ — интеграционная константа. Интегрируя еще раз (47), получаем

$$
x(t) = C_4 - \frac{2\delta v^2}{g\sqrt{1 + C_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{C_3 e^{\frac{-\varepsilon g t}{v}}}{\sqrt{1 + C_1^2}}. \tag{48}
$$

Из (43) и (48) следует

$$
y(t) = C_2 + C_1 C_4 - \frac{2\varepsilon v^2 C_1}{g\sqrt{1 + C_1^2}}. \tag{49}
$$

Из (44) и (47) после соответствующего интегрирования находим

$$
z(t) = C_5 + \varepsilon v t + \frac{v^2}{g} \ln\left[1 + C_1^2 + C_3^2 e^{\frac{-2\delta g t}{v}}\right]. \tag{50}
$$

Из формул (48) — (50) вытекает, что при достаточно больших значениях $t$ и при $\dot{z}_0 > 0$ центр масс совершает приближенно праволинейное равномерное движение вдоль оси $z$. В общем случае центр масс движется с постоянной по величине скоростью.

Определим необходимую управляющую силу $\boldsymbol{R}$. На основании теоремы о движении центра масс имеем

$$
m w_G = m g + \boldsymbol{R}. \tag{51}
$$

Проектируя (51) по осям координатной системы, неподвижной по отношению к Земле, получаем

$$
m\ddot{x} = R_x, \qquad m\ddot{y} = R_y, \qquad m\ddot{z} = -mg + R_z. \tag{52}
$$

Из (42) и (47) следует

$$
\lambda(t) = \frac{\varepsilon g}{v} \cdot \frac{1 + C_1^2 + C_3^2 e^{\frac{-2\varepsilon g}{v}t}}{1 + C_1^2 + C_3^2 e^{\frac{-2\varepsilon g}{v}t}}. \tag{53}
$$

Равенства (52) и (53) определяют закон изменения реакции. Из (52) следует, что $\boldsymbol{R}$ коллинеарна скорости $\boldsymbol{v}$ центра масс $G$ тела, т. е.

$$
\boldsymbol{R} = m\lambda \boldsymbol{v}_G. \tag{54}
$$

С помощью (54) легко проверить, что условие (5) идельности связи выполнено. Действительно (5) имеет в этом случае вид

$$
\boldsymbol{R} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{r}} = m\lambda \boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{v} = m\lambda v \delta v = 0, \tag{55}
$$

так как из за того, что $v = \mathrm{const}$ следует $\delta v = 0$ и, следовательно, (55) выполнено.

К этому примеру применим уравнения (32) без множителей Лагранжа. В этом случае из уравнений (27) получаем

$$\dot{z} = \sqrt{v^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}, \tag{56}$$

т.е. $\dot{x}$ и $\dot{y}$ независимые скорости. Тогда уравнения (32) имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right)\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}}, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right)\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}}, \end{aligned} \tag{57}$$

где $U$ определено из (38), а $T$ из (36). Делая соответствующие выкладки в (57), получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \ddot{z}\frac{\dot{x}}{\sqrt{v^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}} &= \frac{g\dot{x}}{\sqrt{v^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}}, \\ \ddot{y} - \ddot{z}\frac{\dot{y}}{\sqrt{v^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}} &= \frac{g\dot{y}}{\sqrt{v^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}}. \end{aligned} \tag{58}$$

Как следствия из (58) будем иметь

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}}{\dot{y}},$$

т. е. (42), откуда следует (43). Поставляя в (58), находим

$$\frac{v^2\ddot{x}}{\sqrt{v^2 - (C_1^2 + 1)\dot{x}^2}} = g\dot{x},$$

т. е. заново получаем (46), откуда следуют теже квадратуры.

4. Пример системы с нелинейными неголономными связями второго порядка.

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки, для которого выполнено условие обобщенной прецесии Гриоли [14]:

$$p\dot{q} - q\dot{p} + r(p^2 + q^2) - \mu(p^2 + q^2)^{3/2} = 0, \tag{59}$$

здесь снова $p$, $q$, $r$ компоненты угловой скорости $\omega$, $\mu$ — постоянная. Отметим, что для обыкновенной прецессии, т. е. когда ось собственного вращения тела и вертикаль образуют постоянний угол $\theta$, условие (59) выполняется тождественно при $\mu = \mathrm{ctg}\theta$. Но для обобщенной прецессии оно ведет к зависимости

$$f = \ddot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta - \ddot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}^2\cos\theta \tag{60}$$

$$+\dot\psi^3 \sin^2\theta \cos\theta - \mu(\dot\psi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2)^{3/2} = 0.$$

Кинетическая энергия тела, как известно, имеет вид

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \tag{61}$$

где $A$, $B$, $C$ — главные моменты инерции тела. Силовая функция приложенной силы тяжести будет

$$U = -mgz_G = -mg(\xi_0 \sin\theta \sin\phi + \eta_0 \sin\theta \cos\phi + \zeta_0 \cos\theta), \tag{62}$$

где $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ координаты центра масс $G$ тела по отношению осей, связанны с телом. Для рассматриваемой системы применим уравнения Раута (26) с углами Эйлера $\phi$, $\psi$, $\theta$ в качестве независимых параметров, т.е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\phi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\partial U}{\partial \phi} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \ddot\phi}, \tag{63}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\psi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \psi} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \ddot\psi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \ddot\theta}.$$

На основе (61) и кинематических формул Эйлера будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\phi} = r, \qquad \frac{\partial T}{\partial \phi} = (A - B)pq, \tag{64}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\psi} = Ap \sin\theta \sin\phi + Bq \sin\theta \cos\phi + Cr \cos\theta,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = Ap\cos\phi - Bq \sin\phi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = Ap\dot\psi \cos\theta \sin\phi + Bq\dot\psi \cos\theta \cos\phi - Cr\dot\psi \sin\theta.$$

Из (62) и (60) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = mg(\eta_0 \sin\theta \sin\phi - \xi_0 \sin\theta \cos\phi), \tag{65}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -mg(\xi_0 \cos\theta \sin\phi + \eta_0 \cos\theta \cos\phi - \zeta_0 \sin\theta),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot\phi} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \ddot\psi} = \dot\theta \sin\theta, \qquad \frac{\partial f}{\partial \ddot\theta} = -\dot\psi \sin\theta.$$

Подставляя (64) и (65) в (63), получаем

$$C\dot r - (A - B)pq = mg(\eta_0 \sin\theta \sin\theta - \xi_0 \sin\theta \cos\phi), \tag{66}$$

$$A\dot{p}\sin\theta\sin\phi + B\dot{q}\sin\theta\cos\phi + C\dot{r}\cos\theta + Ap(\cos\theta\sin\phi\dot{\theta}$$
$$+\sin\theta\cos\phi\dot{\phi}) + Bq(cos\theta\cos\phi\dot{\theta} - \sin\theta\sin\phi\dot{\phi}) - Cr\sin\theta\dot{\theta} = \lambda\dot{\theta}\sin\theta,$$
$$A\dot{p}\cos\phi - B\dot{q}\sin\phi + Ap(-\sin\phi\dot{\phi} - \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi)$$
$$+Bq(-\dot{\phi}\cos\phi - \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi) + Cr\dot{\psi}\sin\theta$$
$$= mg(-\xi_0\cos\theta\sin\phi - \eta_0\cos\theta\cos\phi + \zeta_0\sin\theta) - \lambda\dot{\psi}\sin\theta.$$

Исключая из второго и третьего уравнений (66) получим как следствие интеграл энергии тела

$$(67)\qquad Ap^2 + Bq^2 + C^2 + mg(\xi_0\sin\theta\sin\phi + \eta_0\sin\theta\cos\phi + \zeta_0\cos\theta) = h_1.$$

Следовательно система уравнений сферического движения при наличии обобщенной прецессии Гриоли имеет вид

$$(68)\qquad C\dot{r} - (A-B)pq = mg(\eta_0\sin\theta\sin\phi - \xi_0\sin\theta\cos\phi),$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + mg(\xi_0\sin\theta\sin\phi + \eta_0\sin\theta\cos\phi + \zeta_0\cos\theta) = h_1,$$
$$\ddot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta - \ddot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}^2\cos\theta$$
$$+\dot{\psi}^3\sin^2\theta\cos\theta - \mu(\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Как частный случай для уравнения (68) рассмотрим движение однородного шара с неподвижным геометрическим центром. В этом случае первые два уравнения (68) получаем в виде

$$(69)\qquad r = C_1,\ p^2 + q^2 = \dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2 = h,$$

где $h$ и $C_1$ постоянные интегрирования. Из (69) получаем

$$(70)\qquad \dot{\psi} = \frac{\sqrt{h - \dot{\theta}^2}}{\sin\theta}.$$

Подставляя (71) в последнее уравнение (68) и делая известные преобразования, получаем

$$(71)\qquad \ddot{\theta}\sin\theta - \cos\theta(h - \dot{\theta}^2) + \mu\sqrt{h}\sqrt{h - \dot{\theta}^2}\sin\theta = 0.$$

После замены

$$(72)\qquad u = \sqrt{h - \dot{\theta}^2}$$

запишем уравнение (71) в виде

$$(73)\qquad \frac{du}{d\theta} + \mathrm{ctg}\theta u = \mu\sqrt{h}.$$

Общее решение (73) имеет вид

$$u = \frac{C_2 - \mu\sqrt{h}\cos\theta}{\sin\theta}, \tag{74}$$

где $C_2$ постоянная интегрирования. На основе (72) и (74) получаем

$$t + C_3 = \int \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{h\sin^2\theta - (C_2 - \mu\sqrt{h}\cos\theta)^2}}. \tag{75}$$

Очевидно (75) можно довести до элементарных квадратур.

## ЛИТЕРАТУРА


1. A p p e l, P. – C. R., t. 152, No 19, 1911, 1197–1199.
2. A p p e l, P. – Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. 33, 1912, 259–267.
3. A p p e l, P. – Memorial des sciences math., t. 1, 1925.
4. D e l a s s u s, E. – C. R., t. 152, No 25, 1911, 1739–1743.
5. D e l a s s u s, E. – C. R. , t. 154, No 16, 1912, 964–968.
6. D e l a s s u s, E. Annalies de l'Ecole Normale Super., t. 30, 1913, 483–520.
7. М е щ е р с к и й, И. В., Сообщения мат. общества при Харьковском университете, 1887.
8. B i l i m o v i t c h, A. Publication Math. de l'Université de Belgrade. t. 3, 1936.
9. C a s t o l d i, L. Rendiconti Jst. Lombardo di Scie Lettere, ser. 3, v. 79, 1946.
10. П о г а с о в, Г. С. Сб. статей ВЗПИ, в. 12, 1955, 83–90.
11. M e l i s, A. Rend. Semin. Fac. sci. Univ. Cagliari, v. 25, f. 3–4, 1956, 143–153.
12. Н о в о с е л о в, В. С. – Вестник ЛГУ, №19, вып. 4, 1957, 106–111.
13. Д о б р о н р а в о в, В. В. Сборник статей МВТУ, №104, 1961.
14. Ц е н о в, И. – Год. Соф. унив., т. XV–XVI, 1924.
15. Ц е н о в, И. – ЦАН СССР, 89, №1, 1953, 21–24.
16. Д о л а п ч и е в, Б. – Известия Болгарской АН, Математика, №2, 1960.
17. Д о б р о н р а в о в, В. В. Основы механики неголомных систем, Высшая школа, 1970.
18. Н о в о с е л о в, В. С. – Учение записки ЛГУ, №217, вып. 31, 1957.
19. P r z e b o r s k i. A Die allgemeinst den Gleichungen der klassischen Dynamik.– Math. Zeitschrift, 33, II, 2, 1932.
20. К о ч и н, И. Е. Об освобождаемости механических систем, ПММ, т. 10, 1946.


*Received 21. V. 1990*