
ГИДРОДИНАМИЧНИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ТВЪРДИ ИЛИ ФЛУИДНИ ЧАСТИЦИ

ЗАПРЯН ЗАПРЯНОВ

Запрян Запрянков. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТВЕРДЫХ
ИЛИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ

В начале работы сделан обзор исследований гидродинамического взаимодействия твердых и жидких частиц при малых числах Рейнольдса. Рассматриваются тоже системы, в которых микроскопический масштаб длины во много раз превышает размер молекул (так что система имеет макроскопические свойства) и одновременно с этим, во много раз меньше характерной длины макроскопического образца. При таких условиях, неоднородная среда (смесь) может рассматриваться в макроскопическом масштабе как континуум, который характеризуется „эффективными“ свойствами.

В работе дискутируется тоже количественное определение осреднения по „ансамблю реализации“, т. е. осреднение относительно большого числа систем, которые являются идентичными в макроскопических деталях, но различаются в микроскопическом масштабе. Рассмотренные результаты (из-за математической аналогии) для эффективной вязкости, легко переносятся и на коэффициент теплопроводности, коэффициент электропроводности и коэффициент диффузии. Поступательные и вращательные движения частиц и их гидродинамическое взаимодействие описываются через несколько внутренних тензоров, которые зависят только от форм и размеров частиц.

Получено „точное“ решение задачи обтекания двух сферических пузырей потоком Пуазелля. Исследуется влияние поверхностно-активных веществ на структуру течения.

Zapryan Zapryanov. HYDRODYNAMIC INTERACTION OF RIGID OR FLUID PARTICLES

The hydrodynamic interaction of rigid or fluid particles at small Reynolds numbers is reviewed. The paper focuses on the many instances in which the “microscopic” length scale (eg.

the average domain size) is much larger than the molecular dimensions (so that the domain possess macroscopic properties) but much smaller than the characteristic length of the macroscopic sample. In such circumstances the heterogeneous material can be viewed as a continuum on the macroscopic scale and macroscopic or "effective" properties can be ascribed to it.

A quantitative definition of an ensemble average for particulate systems is discussed. The ensemble average refers to an average over a collection of a large number of systems which are identical in their macroscopic details but are different in their microscopic details. For reasons of mathematicle analogy, the general results given here for the effective viscosity translate into equivalent results for the thermal conductivity, electrical conductivity, dielectric constant and diffusion coeficient. The translational and rotational particle motions are marked to be governed by several intrinsic ténsors that depend only upon the size and shape of the particle.

Bipolar coordinates are employed to obtain "exact" solution of the slow, Poisenille flow past two spherical bubbles. The influence of surface active agents on the flow is investigated.

1. ХИДРОДИНАМИЧНИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И МОДЕЛИРАНЕ НА СУСПЕНЗИИ И ЕМУЛСИИ

При движение на капки, мехури или твърди частици във вискозен флуид съществуват два вида хидродинамични взаимодействия — директно, когато всяка частица (твърда или флуидна) си взаимодействува със заобикалящия флуид, и косвено, когато частиците си взаимодействуват помежду си посредством флуида между тях. Резултатите от изследванията на хидродинамичните взаимодействия се прилагат много често при моделирането на суспензии и емулсии. Използувайки например директното взаимодействие на твърди или флуидни частици с вискозен флуид, са получени важни формули за „ефективния“ вискозитет на разредените суспензии и емулсии.

Пръв Айнщайн [1, 2] през 1906 и 1911 г. пресметна ефективния вискозитет на разредени суспензии на твърди сферични частици (дисперсна фаза) в нютонова течност (непрекъснатата фаза):

$$(1.1) \quad \mu^* = \mu_0 \left(1 + \frac{5}{2} \varphi \right),$$

където μ_0 е вискозитетът на непрекъснатата фаза, φ — отношението на обема на диспергираните частици към обема на суспензията, а μ^* — нейният ефективен вискозитет.

За да изведе тази формула, Айнщайн най-напред намира хидродинамичното взаимодействие на твърда сферична частица с градиентно вискозно течение. Извършените експериментални измервания на ефективния вискозитет на разредени суспензии [3, 4] показват, че коефициентът пред φ приема стойности от 1,5 до 5.

През 1922 г. Джефри [5] изследва суспензии, в които за дисперсна фаза са взети елипсовидни частици. В зависимост от елипсовидността ϵ (където $\epsilon = \frac{a-b}{a}$ за продълговат и $\epsilon = \frac{b-a}{a}$ за сплеснат елипсоид) на частиците той получава за ефективния вискозитет на суспензията формулата

$$(1.2) \quad \mu^* = \mu_0(1 + \nu\varphi),$$

където ν зависи от ε , т. е. от геометрията на елипсоида.

Ефективният вискозитет на силно разредени емулсии (сферични капки от една течност в друга течност) е пресметнат от Тейлър [6, 7, 8]:

$$(1.3) \quad \frac{\mu^*}{\mu_0} = 1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{\hat{\mu} + \frac{5}{2}\mu}{\hat{\mu} + \mu} \varphi.$$

Тук μ и $\hat{\mu}$ са вискозитетите съответно на носещата и дисперсната фаза. Когато $\frac{\hat{\mu}}{\mu} \rightarrow \infty$, от формулата на Тейлър се получава като частен случай формулата на Айнщайн (1.1), а при $\frac{\hat{\mu}}{\mu} \rightarrow 0$, т. е. когато флуидните частици са мехури

$$(1.4) \quad \mu^* = \mu_0(1 + \varphi).$$

Формулата (1.3) е изведена при предположение, че $\varphi \ll 1$, и експерименталните изследвания показват, че тя дава добри резултати при $\varphi \ll 0,02$. Когато обемната концентрация не отговаря на това условие, трябва да се отчита и косвеното хидродинамично взаимодействие между флуидните частици.

Смолуховски [9] първи теоретично изследва седиментацията на частици в неограничена течност. За тази цел създава т. нар. „метод на отражението“, съгласно който граничните условия върху отделните частици се удовлетворяват последователно едно след друго. Физически „методът на отражението“ се интерпретира с помощта на предположението, че някакво начално смущение се отразява от границите на частиците, като ефектът при следващото отражение отслабва. При първото отражение се предполага, че в суспензията се движи само една от n -те сферични частици и граничното условие за полепване се удовлетворява само върху нея. В резултат на това възниква смутено течение, което влияе на всяка от останалите $n - 1$ частици. При второто отражение граничното условие се удовлетворява само върху една от тях и т. н. Поради линейността на уравненията на Стокс и на граничните условия първото приближение на решението за i -тата частица се получава, като се съберат „първите отражения“ на всички $n - 1$ частици. Тъй като общото съпротивление, което изпитват частиците, се разпределя върху всяка от тях, то i -тата частица изпитва по-малко съпротивление, отколкото, ако е сама в течността. Сходимостта на „метода на отражението“ не е доказана, въпреки че се използва от много изследователи. Прилагайки го, Смолуховски [9] получава в първо приближение за съпротивлението, което изпитва първата частица, формулата

$$F_1 = 6\pi\mu aU \left[1 - \frac{3}{4} \sum_{i=2}^n \frac{1}{r_i} \left(1 + \frac{x_i^2}{r_i^2} \right) \right],$$

където r_i е разстоянието между частиците 1 и i , x_i — проекцията на това разстояние върху оста Oz , U — скоростта на едновременно падащите

частици и a — големината на радиуса им. Тъй като знакът на израза пред сумата е "—", то при по-голям брой n на сферите съпротивлението, което изпитва всяка от тях, ще бъде малко. Това означава, че при по-голям брой на сферичните частици скоростта им на падане ще бъде по-голяма.

За да извърши пресмятанията, Смолуховски взема центровете на частиците да съвпадат с върховете на кубическа решетка. Нека U_0 е скоростта на седиментация на коя да е от n -те частици в безкрайна течност, когато не си взаимодействуват с другите частици, а l — разстоянието между две произволни частици. Тогава скоростта U на седиментация на коя да е от n -те частици, когато те падат заедно, е равна на

$$(1.5) \quad U = \frac{U_0}{1 + 2,6(a/l)}.$$

В съвкупност от частици, образувачи кубическа решетка, обемната концентрация на частиците е равна на $\frac{4}{3} \pi \left(\frac{a}{l}\right)^3$. Следователно

$\frac{a}{l} = 0,62\varphi^{1/3}$ и формулата (1.5) добива вида

$$(1.6) \quad U = \frac{U_0}{1 + k\varphi^{1/3}},$$

където $k \approx 1,6$.

Предполагайки, че частиците могат с една и съща вероятност да заемат всички положения около коя да е от тях, Бюргерс [10] получава същата формула (1.6), но при $k = 6,88$.

Интересни резултати за скоростта на седиментация на частици в суспензия получава Кинч [11]. Той разглежда подробно случаите на две и три сферични частици, като прави количествени оценки и сравнения с резултати на други изследователи. Според него в резултатите на Бюргерс влиянието на концентрацията φ е завишено, защото не са отчетени ефектите от по-висок порядък.

Интересен метод за решаване на задачата за обтичане на сферични частици, разположени във върховете на правоъгълна решетка, предлага Хасимото [12]. Правоъгълната периодична структура се състои от последователно повтарящи се правоъгълни паралелепипеди, определени от три независими вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Ако се избере координатна система с начало в един от центровете (възлите) на частиците, радиус-векторът \vec{r}_n на центъра на коя да е от останалите частици ще се определя от равенството

$$\vec{r}_n = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3,$$

където $n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Хасимото предлага оригинална идея — частиците да се заменят с концентрирани (точкови) сили, действащи в центровете им. При моделирането на течението той модифицира уравненията на Стокс, добавяйки

нов член, който описва сили на реакции, действащи във всички възли на решетката. Така се получават уравненията

$$(1.7) \quad \mu \Delta \vec{V} = \nabla + \vec{F} \left(\sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \right), \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0,$$

където \vec{r} е радиус-векторът на произволна точка от течността и функцията на Дирак се задава по обикновения начин

$$1) \int_{\tau} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{при } \vec{r}_n \in \tau \\ 0 & \text{при } \vec{r}_n \notin \tau; \end{cases}$$

$$2) \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) = 0 \text{ при } \vec{r} \neq \vec{r}_n$$

за произволен обем τ .

За да намери решенията на уравненията (1.7), Хасимото търси скоростта и налягането във вид на фурьеров ред с тройно разлагане

$$\vec{V} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \vec{V}_n \exp \left[-2\pi i \left(\vec{k} + \vec{r} \right) \right],$$

$$-\nabla p = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \vec{P}_n \exp \left[-2\pi i \left(\vec{k} + \vec{r} \right) \right].$$

Тук \vec{k} може да се разглежда като радиус-вектор на взаимна решетка с нови базисни вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, за които са изпълнени равенствата

$$\vec{k} = n_1 \vec{b}_1 + n_2 \vec{b}_2 + n_3 \vec{b}_3, \quad \vec{k} \cdot \vec{a}_i = n_i,$$

където $i = 1, 2, 3$.

Като се заменят изразите за \vec{V} и ∇p в уравненията (1.7), се получава система уравнения относно компонентите на векторите \vec{V}_n и \vec{P}_n , които могат да се намерят във функция на неизвестната сила \vec{F} . За да определи \vec{F} , Хасимото поставя изискването средната скорост върху повърхността на сферичните частици да бъде равна на нула, т. е.

$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int \int_{r=a} \vec{V} dS,$$

и получава

$$(1.8) \quad F = \frac{6\pi\mu a U}{1 - 1,7601\varphi^{1/3}} + O(a^3),$$

където φ е обемната концентрация на частиците, а U — скоростта на филтрация на течението. Тъй като (1.8) може да се запише и във вида

$$F = 6\pi\mu a U \left(1 + 1,7601\varphi^{1/3} \right) + O\left(\varphi^{2/3}\right),$$

за скоростта на седиментация на частици, образуващи кубическа решетка, се получава

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{1 + 1,7601\varphi^{1/3}}$$

Ще обърнем внимание, че този резултат може да се използва само за силно разреждени суспензии.

При определяне на вискозитета на концентрирани суспензии е необходимо да се отчита не само хидродинамичното взаимодействие между частиците, но и тяхната ротация, взаимни удари, образуване на дублети и по-сложни конфигурации. Най-голямата трудност при моделирането на по-кондензираните суспензии е, че случайната им структура не може да бъде описана посредством прост модел.

В много експериментални и теоретични изследвания зависимостта между ефективния вискозитет и обемната концентрация на частиците се представя чрез следния степенен ред:

$$\frac{\mu^*}{\mu} = 1 + k_1\varphi + k_2\varphi^2 \pm k_3\varphi^3 \pm \dots$$

За първата константа k_1 се приема стойността, получена от Айнщайн — $k_1 = \frac{5}{2}$. Като използват метода на отражението, в който се предполага, че допълнителното течение около втората сфера се компенсира от смущенията в течението около първата сфера, Гут и Симха [13] получават за втората константа $k_2 = 14,1$. Изключвайки ефекта на заемания от частиците обем, Сайто [14] получава $k_2 = 12,6$. По-добро отчитане на ефектите на взаимодействие получава Ванд [15], като отчита образуването на дублетите. За обемни концентрации, по-големи от 0,15 до 0,20, отрязването на степенния ред след члена с φ^2 води до грешки над 10%. Включването на члена с φ^3 дава възможност да се разшири валидността на степенния ред до $\varphi \approx 0,40$. Мони [16] предлага да се използва формулата

$$\frac{\mu^*}{\mu_0} = \exp [2,5(1 - a_2\varphi)],$$

където константата a_2 се определя от експеримента. Като изхожда от модела, основаващ се на кубично наредени частици, и от факта, че при допиращи се сферични частици относителната вискозност трябва да клони към безкрайност, Мони предлага за a_2 стойности, отговарящи на условията $1,35 < a_2 < 1,91$.

Крайният размер на частиците при по-концентрирани суспензии пречи на централната частица да взаимодействува с по-отдалечените. Затова ефектът на екраниране редуцира резултата, получен при заместване на частиците с материални точки. Като отчита това, Симха [17] получава за разреждени суспензии формулата

$$\frac{\mu^*}{\mu} = 1 + 2,56 \left(1 + \frac{25\varphi}{4f^3} \right),$$

където $1 < f < 2$.

В [18] се обръща внимание на важността на размера на частиците. За частици с диаметър, по-малък от 1 до 10 микрона, започват да действуват колоидно-химичните сили, които са причина за ненютоновото поведение на суспензиите. В резултат на това относителната вискозност расте с намаляване размерите на частиците и намалява с растенето на интензитета на градиентното течение. За частици с диаметър, по-голям от 1 до 10 микрона, увеличаването на диаметъра на частиците и въртенето им водят до допълнително увеличаване на дисипацията на енергията на относителния вискозитет.

Съществуват два начина за теоретично описание на даден материал в зависимост от линейния мащаб, в който се извършват изследванията:

а) макроскопичен, в който материалът се разглежда като сложна, но хомогенна непрекъснатата среда;

б) микроскопичен, в който материалът се предполага, че е съставен от дискретни частици, които се движат транслационно и ротационно, деформират се и взаимодействуват помежду си.

Суспензиите са дисперсни среди, представляващи смес от две хомогенни среди. При течните суспензии едната от средите (фазите) е течна, а другата — частици (включвания), които могат да бъдат твърди, течни или газообразни.

Много от макроскопичните свойства на дисперсните среди могат да се предсказват теоретично. Такива са например т. нар. преносни свойства. Те характеризират способността на дисперсната система като цяло да пренася топлина, момент на количество движение и др. под влияние на градиентите на тези величини в разглежданата среда.

Ще отбележим, че въпреки големия брой статии, посветени на изследването на дисперсните среди, досега са предложени строги неевристични теории само за разредените суспензии. Изчерпателни сведения за изследванията до 1974 г. са дадени в обзорите на Бренер [19, 20, 21] и Кокс и Бренер [22].

Заменияйки приближено влиянието на съседните частици върху произволно взета частица с действието на концентрирани („точкови“) сили, действащи в техните центрове, Хасимото [12] получава следната формула за редукцията на скоростта при седиментация:

$$(1.9) \quad \frac{\Delta U}{U_0} = 1,76\varphi^{1/3},$$

където $\Delta U = U_0 - U$, U_0 е установената (терминалната) скорост на единична частица, движеща се под действието на силата на тежестта \dot{y} , а U — средната скорост на седиментация на частиците от суспензията.

Теоретичните резултати за пресмятане на ефективния вискозитет на суспензии на твърди сферични частици, на твърди сфероидални частици и на сферични флуидни частици се отнасят за случая, когато взаимодействието между частиците може да се пренебрегне, т. е. при силно разреденни суспензии, при които дисперсната фаза заема само няколко процента

от обема на суспензията. Практиката обаче изисква създаването и на модели, отнасящи се за суспензии с по-големи концентрации. Такъв е „клетъчният модел“, предложен от Симха [23], а след това модифициран от Хапел [24, 25], Кувабара [26] и др. Основно предположение на „клетъчният модел“ е, че действието на дадена частица от суспензията върху останалите частици на течението може да се локализира вътре в клетка, съдържаща частицата и имаща външна граница с подходящо избрано гранично условие върху нея. Когато външната граница на клетката е сфера, нейният радиус се взема равен на $a\varphi^{-1/3}$. Коефициентът на пропорционалност във формулата на Кувабара [26]

$$(1.10) \quad \frac{\Delta U}{U_0} = 1,62\varphi^{1/3}$$

се различава от съответния коефициент във формулата на Гал-Ор и Васло [27]

$$(1.11) \quad \frac{\Delta U}{U_0} = 1,5\varphi^{1/3}.$$

При седиментация на капки в течност Гал-Ор и Васло [27] получават следната по-обща формула:

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{1 + \frac{3}{2}\lambda}{1 + \lambda} \varphi^{1/3}, \quad \lambda = \frac{\hat{\mu}}{\mu}.$$

Ще отбележим, че за друга външна граница на клетката (цилиндрична, кубична и др.) или други гранични условия върху нея коефициентът на пропорционалност при $\varphi^{-1/3}$ променя големината си. Това показва, че значителните опростявания на пресмятанията при „клетъчният модел“ стават за сметка на точността на резултатите.

Бринкмън [28] приема, че влиянието на всички частици върху дадена частица може да се моделира с влиянието, което изпитва разглежданата частица при движението ѝ в пореста среда с феноменологични коефициенти, зависещи от обемната концентрация φ на суспензията.

През 1947 г. чрез този подход Бринкмън получава формула за усредненото въздействие, което оказва дадена частица, преминаваща през слой от много неподвижни частици. Идеите на този подход получават по-нататъшно развитие в работите на Том [29], Лундрен [30], Чилдрес [31], Хаулес [32] и на Буевич и сътрудници [33]–[36].

В работите от това направление основният резултат при определяне скоростта на седиментация е

$$(1.12) \quad \frac{\Delta U}{U_0} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \varphi^{1/2}.$$

Тази формула е обобщена през 1977 г. от Сиркар [37] за емулсия, в която флуидните частици имат различни радиуси.

Важно предположение при прилагането на този подход е, че поведението на дадена микрочастица се влияе макроскопично при обтичането ѝ от течението в порестата среда, състояща се също от микрочастици. Това е недостатък на този подход, защото излиза, че може да намерим поведението на дадена молекула в течение на течност, състояща се от подобни молекули, като решим уравненията, описващи обтичането на тази молекула от същото течение.

Ще отбележим, че използването на методите на самосъгласуваното поле дава възможност въпреки направената по-горе забележка да се моделират суспензии с обемна концентрация на частиците 30–40%.

В т. нар. статистически подход се предполага, че суспензията е статистически хомогенна среда, т. е. че частиците се движат свободно и центровете им могат да заемат статистически произволно място в носещата течност. Това означава, че многобройните частици на суспензията са разположени хаотично (неподредено) в носещата течност и има смисъл само статистическо описание на разположението им. Изследванията в това направление започват от Бюргерс [10]. Той използва динамично определение на вискозността посредством напрежението, вместо да се основава на дисипацията на енергията, както прави Айнщайн.

Изследвайки седиментацията на случайно разпределение на частиците в суспензия, Бюргерс [10] и Пюн и Фиксман [38] получават, че средното относително изменение на скоростта на падане е пропорционално на φ , което се различава значително от формулите (1.9)–(1.13), получени при предположение, че частиците са подредени регулярно или че се използва „клетъчният модел“. За скоростта на седиментация на суспензия от еднакви твърди частици Батчелор [39, 40] получава формулата

$$(1.13) \quad \frac{\Delta U}{U_0} = 6,55\varphi.$$

Вашолдър [41] обобщава изследванията на Батчелор за случая на суспензия (емулсия) от еднакви сферични капки, но допуска грешка, която е коригирана в работата на Хабер и Хетсрони [42].

В [43] Сафман прави пълен анализ на разликите на степените на концентрацията φ във формулите (1.9)–(1.13).

Друг метод за изследване на суспензиите предлагат през 1959 г. Ландау и Лифшиц [44]. На микро- (молекулно) равнище суспензиите имат хетерогенен състав и нестационарно движение на молекулите. За да се получат макроскопични характеристики на суспензията, е необходимо да се използва някакъв вид усредняване. Като използват обемно усредняване, Ландау и Лифшиц показват, че обемното усреднено напрежение в суспензия, съдържаща много частици, е равно на напрежението, усреднено в голям обем на една единствена тестова (пробна) частица от суспензията, намираща се вътре в него. Това означава, че средното в даден обем напрежение на суспензията може да се пресметне, без да се знаят напреженията вътре в частиците.

Конститутивното уравнение на суспензията и при този метод се получава, като се запише зависимостта между усреднения тензор на напреженията и усреднения тензор на скоростта на деформацията. За съжаление обаче при този подход (както и при подхода на Айнщайн) се появяват интеграли, които не са абсолютно сходящи.

Петерсън и Фиксмън [45] използват метода на Ландау и Лифшиц, за да пресметнат хюйгенсовия коефициент K_H , появяващ се в разлагането на ефективната вискозност

$$\mu = \mu_0 \left[1 + \frac{5}{2} \varphi + K_H \left(\frac{5}{2} \right)^2 \varphi^2 + \dots \right].$$

При тези изследвания те за първи път осъзнават трудностите, свързани с липсата на абсолютна сходимост на интеграли, и предлагат начин за тяхното преодоляване. Поради не съвсем ясното изложение обаче работата [45] не получава нужното признание в научната литература.

Систематичен подход за пълно преодоляване на трудностите, свързани с появата на неабсолютно сходящи интеграли при пресмятане на ефективния коефициент на вискозността на суспензиите, дава Батчелор [39, 40] [46, 47]. Като обобщава подхода на Ландау и Лифшиц, той разработва мощни методи в теорията на суспензиите. В случая на сферични частици Батчелор и Грин [46, 47] извършват всеотнашен анализ на взаимодействието на частиците, взети по двойки, и на плътността на функцията на вероятностното разпределение на разстоянията между сферите. За пресмятане на ефективния коефициент на вискозност те предлагат начин, посредством който се избягват трудностите, свързани с появата на неабсолютно сходящи интеграли. С точност до втори порядък $O(\varphi^2)$ те получават известната формула

$$\mu^* = \mu_0 \left(1 + \frac{5}{2} \varphi + 7,6 \varphi^2 \right).$$

Освен за точното пресмятане на хюйгенсовия коефициент K_H подходът на Батчелор [48] е използван и за решаване на други проблеми в теорията на суспензиите — седиментация [40], намиране на обемните макроскопични свойства на суспензии със силно удължени частици [49], хидродинамично взаимодействие на браунови частици [50] и др.

Без преувеличение може да се твърди, че прогресът в изследването на суспензиите след 1970 г. е пряко свързан с последователното използване на подхода на т. нар. „усредняване по ансамбъл“ или „ансамболово усредняване“, използвано най-напред в теорията на суспензиите от Хашин [51] и Батчелор [39].

Друго направление в реологията на дисперсните системи са изследванията, свързани с ненютоновите свойства на течащите суспензии — зависимост на вискозитета от тензора на скоростта на деформацията, ефектите на релаксация и др., които възникват дори при малки стойности на обемната концентрация. Тези свойства на суспензиите са изследвани

от Джефри [5] — за елипсоиди, Олдрид [52, 53] — за течни капки, Годард и Милер [54] и Роски [55] — за еластични сфери, Батчелор [56] — за удължени твърди частици. При тези изследвания линейният мащаб на движението на суспензията е много по-голям от размера на частиците. Затова суспензията може да се разглежда като непрекъсната среда, чиито макроскопични свойства се получават посредством ансамблово усредняване на съответните микроскопични величини. След получаване на детайлното поле около всяка частица е възможно получаването на реологично уравнение на състоянието, т. е. на функционална зависимост между напрежението и съответните физични величини. Този подход създава сериозни трудности, защото намирането на картината на течението около всяка частица е почти невъзможно. Затова за предпочитане е получаването на по-обща зависимост между напрежението и деформацията — например уравнението на Ривлин—Ериксън [57], уравнението на Олдрид [58], уравнението на Ханд [59] и др.

Досега взаимодействието между реологията на суспензиите и феноменологичните теории е твърде слабо, но може да се предполага, че в бъдеще ще се увеличи. Известни надежди за това дават работите на Гордън и Шоуолтър [60] и Ханд [61]. Сравнявайки някои феноменологични уравнения със зависимостите между напрежението и деформацията, Ханд показва, че усредненото напрежение на разредени суспензии на твърди елипсоиди, еластични сфери и течни капки удовлетворява предложеното от него феноменологично конститутивно уравнение.

Изследванията на Тейлър [6, 7] за моделиране на суспензии (емулсии) с течни капки са продължени от Шоуолтър, Чафи и Бренер [62] и Франкъл и Акривос [63]. Като използват метода на регулярните разлагания, Франкъл и Акривос решават хидродинамичната задача за обтичане на деформируема флуидна частица от градиентен поток и чрез подхода на Батчелор [39] пресмятат усредненото напрежение на емулсията и ефективния ѝ вискозитет.

Резултатите на Франкъл и Акривос [63] са разширени от Барти-Бисел и Акривос [64] при отчитане деформацията на капките от по-висок ред. Направеният от тях анализ на реологията на разредени емулсии от деформируеми флуидни частици им позволява да получат две различни множества от уравнения — уравнение, свързващо напрежението и скоростта на деформацията посредством израз, който описва големината на анизотропията, и множество от диференциални уравнения, моделиращи изменението на анизотропията като функция на времето и скоростта на деформацията. Ще отбележим, че всички членове, участващи във феноменологичното уравнение на Ханд [61], възникват по естествен начин и в разгледания проблем от Франкъл и Акривос [63]. При това разредените емулсии трябва да се разглеждат като „псевдо-анизотропичен“ флуид, защото тяхната анизотропия се дължи на движението. От това следва, че тяхното конститутивно уравнение трябва да се редуцира към нютонския „прост флуид“.

Подобно е положението и с разредените суспензии от еластични сфери, изследвани от Годард и Милер [54] — те също са „псевд-анизотропни“, защото анизотропията им се появява само при движение на суспензията.

Уравнението, получено от Ханд [59] през 1961 г. за суспензия с елипсоидни твърди частици, през 1970 г. е получено от Батчелор [39] посредством по-общ и по-ефективен подход. Чрез този подход средното (макроскопичното) напрежение се пресмята като „усреднено по ансамбъла на конфигурациите“ микроскопично напрежение върху репрезентативен обем V , съдържащ N частици. Така се получава

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \frac{4\pi\mu}{V} \sum S_{ij},$$

където сумирането обхваща всички частици и S_{ij} е напрежението, възникнало от наличието им в суспензията.

В повечето от публикуваните досега изследвания върху суспензиите инерционните сили се пренебрегват, т. е. използват се уравненията на Стокс. Посредством метода за срастване на асимптотичните разлагания Лин, Пери и Шоуолтър [65] въз основа на уравненията на Навие—Стокс при малки числа на Рейнолдс решават приближено задачата за обтичане на суспендирана във вискозен флуид сфера и получават картина на течението, която не е симетрична относно частицата поради действието на инерционните сили. Това води до анизотропия в течаща разредена суспензия от твърди сферични частици в условията на различно от нула число на Рейнолдс. Затова при моделирането на такъв вид течащи суспензии е необходимо да се използва обобщено уравнение на Ханд, което да включва тензор с по-висок от втори ранг. Направеният анализ и полученото разпределение на скоростта и налягането в [65] позволяват на авторите да пресметнат влиянието на инерционните сили върху реологията на суспензии от такъв вид. За ефективния вискозитет те получават формулата

$$\frac{\mu^*}{\mu} = 1 + \frac{5}{2} \varphi + 1,34 \text{Re}^{3/2} \varphi,$$

където Re е числото на Рейнолдс.

Друго ефективно преносно свойство, което притежават суспензиите, е топлопроводността. Първото изследване на влиянието на взаимодействието на частиците в суспензиите върху изменението на коефициента на топлопроводността е направено от Рейли [66] през 1892 г. Това изменение той търси във вид на ред по степените на параметъра $\frac{a}{d}$, където a е радиусът на сферичните частици, а d — средното разстояние между тях. За да определи влиянието на околните частици върху интензивността на силовия дипол, характеризиращ тестовата частица, Рейли предполага, че градиентът на силата в центъра на тази частица е равен на нейния температурен градиент плюс сумата от температурните полета, индуцирани

от останалите сферични частици. При пресмятането на тази безкрайна сума той стига до интеграл, който не е абсолютно сходящ. Преодоляването на тази трудност е обект на изследванията на Левин [67], Зазовски и Бренер [68], Маккинзи и Макфердан [69] и др. Както Рейли, така и споменатите автори правят обаче идеализираното (грубото) предположение, че частиците в суспензията са регулярно подредени. Ефективната топлинна и електрическа проводимост на суспензии, в които частиците не са подредени, а са хаотично разположени, е изследвана от Джефри [70, 71]. За преодоляване на трудностите, свързани с получаването на интеграли, които не са абсолютно сходящи, той използва подхода на Батчелор. Друг метод за пресмятане на ефективните (преносни) свойства на суспензии с взаимодействащи случайно разположени частици е предложен от О'Брейн [72].

Наред с монодисперсните смеси в много химически технологии се използват и полидисперсните смеси. Тяхното изучаване започва с работите на Том [29], Буевич и Марков [35] и Лундрен [30].

През 1976 г. Батчелор [73] изследва движението на полидисперсна суспензия, като отчита хидродинамичното взаимодействие на частиците при брауновото им движение. Обобщавайки метода на изследване на седиментацията на частиците на монодисперсна суспензия [40], Батчелор [74] пресмята допълнителната скорост на частицата от вида i , дължаща се на наличието на частицата от вида j , посредством функциите, характеризиращи тяхната мобилност. Той намира плътността на вероятността $f_{ij}(\vec{r})$ на относителното разположение на i -тата и j -тата частица, като решава диференциално уравнение от вида на уравнението на Фокер – Планк. Това уравнение описва ефектите на относителното движение на тези частици, дължащо се на гравитацията, на силата на тяхното взаимодействие и на брауновата дифузия.

Усреднените скорости на двата вида частици, отбелязани с индекси i и j , се получават от общите формули:

$$\langle U_i \rangle = U_i^{(0)} (1 + S_{ii}\varphi_i + S_{ij}\varphi_j),$$

$$\langle U_j \rangle = U_j^{(0)} (1 + S_{ji}\varphi_i + S_{jj}\varphi_j).$$

Тук S_{ii} и S_{jj} описват хидродинамичното взаимодействие между частици от един и същ вид; S_{ij} зависят от $\lambda = \frac{a_j}{a_i}$ и $\gamma = \frac{\rho_j - \rho}{\rho_i - \rho}$, където ρ е плътността на течната среда.

Получените в [74] формули, отчитащи влиянието на хидродинамичното взаимодействие между две частици в разглежданата статистически хомогенна, разрежена полидисперсна суспензия, са изследвани числено от Батчелор и Уин [75]. За суспензия, при която двата вида частици се характеризират с $\lambda = \frac{1}{4}$ и $\gamma = 1$, за средните скорости Батчелор и Уин получават

$$\langle U_i \rangle = U_i^{(0)} (1 - 6,55\varphi_i - 3,83\varphi_j),$$

$$\langle U_j \rangle = U_j^{(0)} (1 - 24,32\varphi_i - 6,55\varphi_j).$$

Използвайки подхода на Батчелор, Филибойс [76] разглежда суспензия, която не е хомогенна във вертикално направление, и получава формула за средната скорост на седиментация на сферичните частици. Ако суспензията е хомогенна, като частен случай от тази формула се получава формулата (9.1.38) на Батчелор. Квалифициран обзор на изследванията по седиментация на неколоидални частици в суспензии е направен от Акривос [77] през 1985 г.

Интересът към изследването на хидродинамичното взаимодействие на браунови частици напоследък нарасна много. Това се дължи на голямото му влияние в разтвори с големи макромолекули, където отчитането му води до значителни отклонения в сравнение с разглеждането на всяка браунова частица поотделно. От хидродинамична гледна точка от голямо значение е влиянието на брауновото движение върху усреднените характеристики на суспензиите — напрежение, вискозитет, топлопроводност и др.

Известно е, че ориентацията на несферичните частици (например елипсоидни частици) в разрежена суспензия зависи от вида на течението, в което тя участва. За разлика от флуидното течение, което „подрежда“ в определен ред частиците от суспензията, брауновото движение води до случайното им разполагане. Взаимодействието на тези два ефекта се описва от уравнението на Фокер – Планк. В частност коефициентът k_1 във формулата $\mu^* = \mu(1 + k_1\varphi)$ за ефективния вискозитет зависи от формата на частиците и вида на течението, в което те участват. Батчелор [78] показва, че брауновото движение при разрежена суспензия на сферични частици не влияе на коефициента пред първата степен на φ във формулата за ефективния вискозитет. Той установи, че за такива суспензии при чисто деформационно течение хюйгенсовият коефициент е равен на 6,2 вместо на 7,6, когато не се отчита влиянието на брауновото движение. Използвайки метода на т. нар. „точкова апроксимация“, Фелдерхот [79] също изследва влиянието на хидродинамичното взаимодействие при браунови частици в суспензии и получава резултати, които са много близки до резултатите на Батчелор.

Първото системно изследване на реологията на разрежени суспензии от еднакви, достатъчно малки частици с произволна форма, за които брауновите двоици са от значение, е извършено от Жисикус [80] през 1962 г. Влиянието на брауновото движение върху реологичните свойства на суспензии с несферични частици е изследвано и от Хинч и Лил [81] и Лил и Хинч [82]. Влиянието на брауновото въртене на еднакви частици с произволна форма в разрежена суспензия върху реологията ѝ е изследвано от Ралисън [83]. Като се основава на подхода на Батчелор, Ралисън извежда конститутивните уравнения, описващи нестационарното течение, индуцирано от браунови двоици, действащи върху разрежената суспензия на еднакви частици с произволна форма. Пълен обзор на изследванията до 1981 г., свързани с взаимодействието между частиците при

брауновото им движение в суспензиите, е направен от Ръсел [84]. Стабилността (устойчивостта) на суспензиите е от голямо значение за много технологични процеси. Под стабилност на коя да е система, включително и на суспензиите, се разбира способността ѝ да запазва непроменено състоянието си в целия обем. Нестабилността на грубо дисперсните системи се дължи главно на значителната скорост на утаяване на частиците им под действието на гравитацията. От голямо значение е процесът на непосредствено слепване (обединяване) на частиците при ударите между тях. Този процес се нарича коагулация или флокулация.

При удар на две частици между тях действуват сили на привличане и сили на отблъскване. Докато първите са обикновено от вандерваалсов тип, вторите се приема, че се дължат на взаимодействието на заредените повърхности на частиците. Когато преобладават силите на привличане, стабилността е малка и, обратно, нарастването на силите на отблъскване повишава стабилността на суспензията. При коагулация се образуват двойни частици, които при среща с единична дават тройни, а при среща с двойни — агрегати от четири частици и т. н. През 1917 г. Смолуховски [85] изчислява изменението на броя на частиците с времето независимо от големината им. Предполагайки, че коалиценцията между две флуидни частици настъпва веднага щом разстоянието между тях стане много по-малко от радиуса на по-голямата от тях, Хоскинг и Джонс [86] пресмятат скоростта на образуване на агрегати при процеса на седиментация на частиците. Скоростта на коагулация на суспензии, извършващи просто градиентно движение, е пресметната от Картис и Хоскинг [87] и Ван де Вен и Мейсън [88], а при чисто деформационно движение — от Зихнер и Шоуолтър [89]. За разлика от тези изследвания през 1983 г. Фик и Шоуолтър [90] изследват и влиянието на слабо брауново движение на частиците върху скоростта на коагулация както при просто градиентно течение, така и при чисто деформационно течение. Скоростта на образуване на дублети при липса на конвективна скорост на движение на частиците е изследвана от Дерягин и Мюлер [91]. През 1984 г. Шоуолтър [92] прави обзор на изследванията по устойчивост и коагулация на колоиди в градиентни течения. Нов метод за изследване скоростта на коагулация в разрежена суспензия от малки частици предлагат Уин и Батчелор [93]. Този метод включва определянето на плътността на вероятността от диференциалното уравнение в „граничния слой“, където са сравними по големина силите, привеждащи суспензията в движение, и вандерваалсовите сили на привличане на частиците.

Наред с другите въпроси в обзорите на Джефри и Акривос [94] и на Херченски и Пиенковска [95] се разглежда и проблемът за използването на вариационни принципи за намиране на долна и горна граница на изменението на скаларните параметри (ефективен вискозитет и ефективен коефициент на топлопроводността), характеризиращи преносните свойства на суспензиите. Заслужава да се спомене работата на Хашин [51] за възможните математически граници, между които се намира ефективният

вискозитет на изотропна суспензия на частици с произволна форма. Ако вискозитетът на средата вътре в тях е равен на $\hat{\mu}$, а повърхностното напрежение на междуфазовите граници е равно на нула, за долната и горната граница Хашин съответно получава

$$\mu + \frac{\varphi\hat{\mu}}{\frac{2}{5}(1-\varphi) + \mu(\hat{\mu} - \mu)}, \quad \hat{\mu} + \frac{(1-\varphi)\hat{\mu}}{\frac{2}{5}\varphi + \hat{\mu}(\mu - \hat{\mu})}.$$

В [96] Уолпол изказва съображения, позволяващи да се предположи, че сферичната форма на частиците в изотропна суспензия е екстремен случай, така че ако една от границите на Хашин се реализира, това е със сигурност суспензия със сферични частици. Границите, в които може да се изменя ефективния вискозитет на изотропна, не обезателно разрежена суспензия със сферични флуидни частици с вътрешен вискозитет $\hat{\mu}$, са пресметнати от Келер, Рубенфелд и Молиньо [97].

Интересно е да се отбележи, че долната граница на ефективния вискозитет при малки стойности на обемната концентрация на суспензиите със сферични частици съвпада с формулата (9.1.1) на Айнщайн. Коментар на резултатите, отнасящи се до долната и горната граница на ефективния вискозитет на суспензиите, може да се намери в обзора на Хашин [51] и монографията на Беран [98].

Като се използва известната аналогия между механиката на твърдото деформируемо тяло и механиката на флуидите, граници на Хашин и Стрикмън [99] за еластични модули на композитните материали могат да се получат от границите за ефективния вискозитет на нютониви суспензии. Келер, Рубенфелд и Молиньо [97] намират горната и долната граница на измененията на ефективния вискозитет за суспензии, в които частиците са подредени. Общият случай за намиране границите на изменение на суспензии, в които частиците са разположени хаотично, досега не е решен в научната литература.

В обзорната статия на Голдсмит и Мейсън [100] се анализират изследванията на много автори, които разглеждат кръвта като суспензия, състояща се от кръвна плазма и еритроцити. В тези и много други изследвания еритроцитите се моделират като твърди частици — [101], [102], [103]; капки — [104], [105], [106]; еластични частици — [107], [108], [109], или капсули — [110], [111], [112].

Първите опити за моделиране на нехомогенни дисперсни среди са направени въз основа на хипотезата за взаимнопроникващи многоскоростни континууми [113]. Впоследствие към дисперсните системи започват да се прилагат методите на кинетичната теория на газовете [114]. Широко разпространение получават изследванията, в които резултатите от кинетичната теория на газовете се прилагат непосредствено за описание само на отделни параметри на дисперсните среди [115]. В цикъл от изследвания Струмински и сътрудниците му [116] прилагат също кинетичната теория на газовете смеси за моделиране на разредени нехомогенни

дисперсни среди. През 1972 г. Садър и Ли [117] дават статистическо описание на случайно движение на сферични частици в концентрирана суспензия и получават някои резултати за нейния ефективен вискозитет. Те показват, че:

1. Функцията, характеризираща разпределението на частиците в суспензията, не зависи от техните линейни и ъглови скорости, а единствено от положението им.

2. Ефективният коефициент на суспензията не зависи от константата S , характеризираща интензивността на градиентното течение.

3. Ефективният коефициент може да се запише във вид на ред по степените на обемната концентрация φ на частиците, като n -тата степен на φ в реда отговаря на хидродинамичното взаимодействие, включващо n частици.

4. За да се изчислят коефициентите в развитието на ефективния вискозитет в ред по степените на φ , трябва да се познава скоростта на флуида около повърхността на сферичната частица, движеща се заедно със своите съседни частици в градиентно течение.

Тъй като точното определяне на тази скорост, когато си взаимодействуват повече от две частици, е практически невъзможно, Садър и Ли използват метода на „тегловните остатъци“ за получаване на приближено решение за скоростното поле при кубично разпределение на частиците. Разпределението на разстоянието между частиците те намират, като използват приближен статистически модел.

В по-концентрирани суспензии стават важни не само взаимодействията между две частици, но и взаимодействията между три, четири и т. н. частици. При много големи концентрации се стига до уплътнени слоеве от частици, където взаимодействието на много частици доминира над движението на частиците. Определянето на ефективния вискозитет на силно концентрирани суспензии следователно е сложна задача, защото изисква: 1) пресмятане скоростта на флуида на дадена конфигурация с отчитане взаимодействието на много частици и 2) статистически анализ на вероятностите на положението на частиците и техните скорости.

Христов и Марков [119] въз основа на изследванията на Огура [118] прилагат друг статистически подход.

Първите теоретични изследвания на вискозитета на концентрирани суспензии (Симха [23], Халел [25] и Кинч [11]) са описани подробно в монографията на Халел и Бренер [120]. Асимптотичното поведение на зависимостта между ефективния вискозитет и концентрацията на дадена суспензия със сферични частици е изучено от Франкъл и Акривос [121]. За целта те изследват подробно вискозното течение на носещия флуид на суспензията в малък процеп между две близко разположени сферични частици. Предполага се, че частиците образуват кубична решетка, чиито ребра са насочени успоредно на главните оси на тензора на напрежението.

2. УСРЕДНЯВАНЕ И ТЕНЗОР НА СЪПРОТИВЛЕНИЕТО И МОБИЛНОСТТА НА ДВИЖЕЩИ СЕ ЧАСТИЦИ В СУСПЕНЗИИ

В механиката на хетерогенните среди се изследват макроскопичните свойства на суспензиите, двуфазните течения и композитните материали по зададени свойства на техните компоненти. Трудностите, които възникват при математическото моделиране на суспензиите, произтичат от това, че техните макроскопични свойства зависят не само от макроскопичната структура на компонентите им, но и от тяхното хидродинамично взаимодействие и процесите, протичащи в околността на отделните включения (частици). Тъй като относителното положение и ориентацията на отделните частици в различните части на дисперсните системи се изменят случайно, най-подходящо е макроскопичните им свойства да се описват статистически. Широкото навлизане на методите на теорията на вероятностите при изучаване на различните видове суспензии е трайна съвременна тенденция.

В механиката на флуидите се използват няколко различни начина за усредняване с цел да се получат уравнения, които не съдържат детайли от разглежданите течения, а описват само основни техни закономерности. Усредняване на хидродинамичните и газодинамични величини и съответните уравнения се извършва в теорията на турбулентността, кинетичната теория на газовете, динамиката на многофазните среди и др. Известни са следните видове усреднявания — усредняване относно времето, относно обем от разглежданата среда, относно „ансамбъл от реализации“, асимптотично усредняване и др.

Под „ансамбъл“ се разбира множество от голям брой системи, които са различни относно някои техни микроскопични детайли, но са идентични в макроскопичен смисъл. В механиката на хетерогенните среди под „реализация“ на дадена суспензия, съдържаща N сферични частици, се разбира моментната конфигурация на системата от N -те частици, определена от разположението на радиус-векторите на центровете им. „Ансамбъл на реализациите“ се нарича съвкупността от всички физически допустими конфигурации, които се приемат за равноправни. При усредняването по „ансамбъл от реализации“ радиус-векторите на центровете на частиците се разглеждат като независими.

Понятията „ансамбъл“ и усредняване относно „ансамбъл“ са въведени в термодинамиката от Гибс [122].

Целесъобразността от използването на усредняване по „ансамбъл от реализации“ при математическото моделиране на хетерогенните среди е подчертавана през последните години от много учени [123, 124].

За да бъде полезно и удобно за прилагане, усредняването трябва да удовлетворява следните условия:

- 1) $\langle F + G \rangle = \langle F \rangle + \langle G \rangle$;
- 2) $\langle \langle F \rangle \cdot G \rangle = \langle F \rangle \cdot \langle G \rangle$;

$$3) \langle C \rangle = C \quad (C = \text{const});$$

$$4) \left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle;$$

$$5) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle F \rangle.$$

Тук средните стойности на функциите F и G са означени с ъглови скоби. Първите три условия се наричат правила на Рейнолдс, четвъртото — правило на Лайбниц и петото — правило на Гаус.

Известно е, че в статистическата механика цялата информация за вероятността за динамичното състояние на частиците, т. е. за тяхното разположение и скорост, се съдържа във функцията на плътността на вероятностите. Всички макроскопични свойства на системата от частици се изразяват като интегрални моменти от тази функция. Аналогично е положението и при суспензиите.

Да разгледаме течна суспензия с обем V , която съдържа N твърди сферични частици с радиус a . При движението на суспензията частиците се движат една спрямо друга случайно по сложни траектории, които могат да се опишат само статистически. Да означим с \vec{r}_N радиус-векторите на центровете на частиците, имащи общо начало в точката \vec{r}_0 , и с C_N — множеството от радиус-векторите \vec{r}_N на центровете на N -те сфери при коя да е тяхна реализация. Множеството C_N ще наричаме конфигурация на N -те сфери. Ако $f(C_N)$ е функцията на плътността на вероятностите, тогава вероятността за едновременно разполагане на центровете на сферичните частици в диференциалните обеми δv_1 около $\vec{r}_0 + \vec{r}_1$, δv_2 около $\vec{r}_0 + \vec{r}_2$, ... и δv_n около $\vec{r}_0 + \vec{r}_n$ е равна на

$$f(C_N) \delta C_N = f(r_1, r_2, \dots, r_n) \delta v_1 \delta v_2 \dots \delta v_n.$$

Главната идея е законите за запазване и реологичните зависимости, които са в сила при някакво произволно положение (реализация) на N -те частици (т. е. при произволна конфигурация C_N на частиците), да се усредняват по ансамбъла на всевъзможните конфигурации на радиус-векторите на частиците в суспензията. Този ансамбъл се описва напълно от плътността на вероятността $f(C_N)$ на конфигурациите на N -те частици в $3N$ -мерното фазово пространство на компонентите на радиус-векторите им $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$. Поради хомогенността на разположението на частиците в суспензията функцията $f(C_N)$ не зависи от радиус-вектора \vec{r}_0 , който е начална точка за множеството на конфигурациите C_N . Зависимостта на конфигурацията C_N от \vec{r}_0 трябва да се задава само когато C_N се описва експлицитно.

Ако \vec{r}_0 е радиус-векторът на центъра на допълнителната (пробна) частица, може да се разглежда плътността на условната вероятност на конфигурациите, при които центърът на допълнително зададената частица не се променя, т. е. $\vec{r}_0 = \overrightarrow{\text{const}}$. Тази условна вероятност се бележи с $f(C_N | r_0)$.

Тъй като N -те частици в обема са неразличими, функциите $f(C_N)$ и $f(C_N|r_0)$ могат да се нормират посредством равенствата

$$\underbrace{\int \int \dots \int}_{3N} f(C_N) dC_n = \underbrace{\int \int \dots \int}_{3N} f(C_N|r_0) dC_n = N!$$

Тук всеки от $3N$ -мерните интеграли се пресмята по всевъзможните положения на радиус-векторите на центровете на N -те частици, намиращи се в обема V , т. е. прието е означението

$$dC_N = \delta v_1 \delta v_2 \dots \delta v_N = d^3 r_1 d^3 r_2 \dots d^3 r_N = dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2 \dots dx_N dy_N dz_N.$$

Плътноста на вероятността на „конфигурациите“ на радиус-вектора на една сфера се дава с равенствата

$$f(C_1) = f(\vec{r}_0 + \vec{r}_1) = \frac{N}{V} = n,$$

където n е средният брой сфери в единица обем. Освен това връзката между условната и безусловната вероятност има следния вид:

$$f(C_N|\vec{r}_0) = f(\vec{r}_0 + \vec{r}_k) \dots f[C_{N-1} | (r + r_k)] = n f[C_{N-1} | (r + r_k)],$$

където $\vec{r}_0 + \vec{r}_k$ е радиус-векторът на центъра на произволна сферична частица от конфигурацията C_N . Верни са и равенствата

$$f(C_N | \vec{r}_0) = f(\vec{r} + \vec{r}_k | \vec{r}_0) \cdot f[C_{N-1} | (\vec{r}_0, \vec{r}_0 + \vec{r}_k)].$$

Ако центровете на частиците са отдалечени на разстояния, много по-големи от a , може да приемем, че вероятностите на разположение на центровете на две частици, разстоянието между които е много по-голямо от a , са независими. Тогава, ако всяка от сферичните частици на конфигурацията C_N се намира на разстояние от частицата с център в точката \vec{r}_0 , което е много по-голямо от a , то

$$f(C_N|r_0) \approx f(C_N).$$

Ако е известна вероятностната плътност $f(C_N)$ на реализациите на конфигурациите C_N на радиус-векторите $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ в суспензията, то под „усреднени стойности по ансамбъл на конфигурациите C_N “ на макроскопичните величини (скорост, напрежение и скорост на деформация) разбираме

$$\langle \vec{v}(r) \rangle = \frac{1}{N!} \int \vec{v}(r|C_N) f(C_N) dC_N,$$

$$\langle T(r) \rangle = \frac{1}{N!} \int T(r|C_N) f(C_N) dC_N$$

и

$$\langle E(r) \rangle = \frac{1}{N!} \int E(r|C_N) f(C_N) dC_N.$$

В подинтегралните изрази $\vec{v}(r|C_N)$, $T(r|C_N)$ и $E(r|C_N)$ са стойностите на разглежданите величини (скорост, напрежение и скорост на деформацията) в точката с радиус-вектор \vec{r} , когато конфигурацията на центровете има вида C_N . Тези функции трябва да са дефинирани за радиус-вектора \vec{r} , отнасящ се за точки, лежащи както вън, така и вътре в частицата.

Усреднението на функцията $H(r_0|C_N)$ по ансамбъл на конфигурациите на радиус-векторите на центровете на частиците в една суспензия, което е свързано с пробна (фиксирана) частица с център в точката \vec{r}_0 , се дефинира, като се използва плътността на условната вероятност $f(C_N|r_0)$ чрез равенството

$$\langle H(\vec{r}_0) \rangle = \frac{1}{N!} \int H(r_0|C_N) f(C_N|r_0) dC_N.$$

Стойността на физичните величини вътре или вън от частиците на суспензията може да се специализира посредством т. нар. характеристична структурна функция

$$\theta(\vec{r}|C_N) = \theta(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = 1 - \sum_{i=1}^N \eta(a - |\vec{r} - \vec{r}_i|),$$

където $\eta(x)$ е стъпаловидната функция на Хевисайд

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

и $\vec{r}_i(t)$ са радиус-векторите на центровете на частиците. Характеристичната функция е равна на нула за точки вътре в частиците ($|\vec{r} - \vec{r}_i| \leq a$) и единица — за точки вън от частиците ($|\vec{r} - \vec{r}_i| > a$).

Поради независимостта на функциите на плътността на вероятностите $f_N(C_N)$ от пространствената променлива r операторът за „ансамбловото усредняване“ е комутативен относно диференцирането по r , т. е.

$$\left\langle \frac{\partial G}{\partial r} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial r} \langle G \rangle.$$

Освен това, като вземем предвид, че макроскопичният временен мащаб τ превишава много микроскопичния временен мащаб T , получаваме, че с точност $O(\tau/T)$ операторът на „ансамбловото усредняване“ е комутативен и с диференцирането относно времето:

$$\left\langle \frac{\partial G}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle G \rangle.$$

Понякога се използва „ансамбловото усредняване“ отделно за всяка от двете фази съгласно формулите

$$\langle \theta G \rangle = \int \theta G f_N(t, C_N) dC_N,$$

$$\langle (1 - \theta)G \rangle = \int (1 - \theta)G f_N(t, C_N) dC_N.$$

В сила е комутативното свойство на оператора на „фазовото ансамблово усредняване“ относно диференцирането както по отношение на пространствената променлива r , така и по отношение на времето t .

За определяне на хидродинамичното взаимодействие между частиците е необходимо да се дефинират т. нар. тензор на съпротивлението и тензор на мобилността (подвижността). Когато са дадени силите \vec{F} и моментите им \vec{M} , които действат върху частиците от суспензията, и се търси релативното движение на последните във флуида, казва се, че се разглежда проблемът за мобилността на частиците. Обратно, когато е известно релативното движение на частиците и се търсят съпротивленията \vec{F} и моментът \vec{M} , които изпитват частиците при движението им във флуида, казва се, че се разглежда проблемът за съпротивлението.

Да означим с \vec{U} и $\vec{\omega}$ транслационната и ротационната скорост на дадена частица в неподвижен флуид и с U^∞ и Ω^∞ — транслационната и ротационната скорост на флуида в безкрайност. Тогавашката скоростта $\vec{v}^0(\vec{r})$ на смутеното движение на флуида върху повърхността S_p на частицата е

$$(2.1) \quad \vec{v}^0(\vec{r}) = \vec{U} - \vec{U}^\infty + (\vec{\omega} - \Omega^\infty) \times \vec{r} - E^\infty \cdot \vec{r},$$

където E^∞ е тензорът на скоростта на деформацията на несмутения в безкрайност поток. Ако частицата се движеше само с транслационна скорост $U - U^\infty$, поради линейността на уравненията на Стокс връзката между съпротивлението \vec{F} и скоростта $U - U^\infty$ е

$$(2.2) \quad \vec{F} = \mu A \cdot (\vec{U}^\infty - \vec{U}),$$

където A е тензор от втори ранг, зависещ от формата на движещата се частица, а μ — вискозитетът на флуида.

Когато скоростта на смутения поток $\vec{v}^0(\vec{r})$ на повърхността на частицата има вида (2.1), равенството (2.2) се обобщава чрез следната линейна зависимост между моментите и параметрите на течението:

$$(2.3) \quad \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{M} \\ S \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} A & \tilde{B} & \tilde{C} \\ B & C & \tilde{H} \\ G & H & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^\infty - U \\ \Omega^\infty - \omega \\ E^\infty \end{pmatrix}.$$

В това равенство A , B и C са тензори от втори ранг, G и H — тензори от трети ранг, T е тензор от четвърти ранг, а величината S се нарича стокслет на течението. Квадратната матрица в равенството (2.3) се нарича матрица на съпротивлението. От правилата за умножение на

елементите на матрицата в (2.3) следват правилата за получаване на вътрешните тензорни произведения, т. е.

$$(2.4) \quad \begin{aligned} F_i &= \mu A_{ij} (U_j^\infty - U_j) + \mu \tilde{B}_{ij} (\Omega_j^\infty - \omega_j) + \mu \tilde{G}_{ijk} E_{jk}^\infty, \\ S_{ij} &= \mu G_{ijk} (U_k^\infty - U_k) + \mu H_{ijk} (\Omega_k^\infty - \omega_k) + \mu T_{ijkl} E_{kl}^\infty. \end{aligned}$$

При проблема за мобилността на частиците може да се запише равенството

$$(2.5) \quad \begin{pmatrix} \vec{U}^\infty - \vec{U} \\ \Omega^\infty - \omega \\ \mu^{-1} S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \tilde{b} & \tilde{g} \\ b & c & \tilde{h} \\ g & h & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^{-1} F \\ \mu^{-1} M \\ E^\infty \end{pmatrix}.$$

В това равенство a, b, c са тензори от втори ранг, g, h — тензори от трети ранг, а m е тензор от четвърти ранг. Квадратната матрица в (2.5) се нарича матрица на мобилността.

Ще отбележим, че ако се изключи от разглеждане стокслетът S , между двете споменати матрици съществува зависимост. Наистина от

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{T} \end{pmatrix} &= \mu \begin{pmatrix} A & \tilde{B} \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^\infty - \vec{U} \\ \vec{\Omega} - \vec{\omega} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{H} \end{pmatrix} (E^\infty) \\ &= \mu \begin{pmatrix} A & \tilde{B} \\ B & C \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a & \tilde{b} \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \vec{F} \\ \mu^{-1} \vec{M} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} (E^\infty) \right] + \mu \begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{H} \end{pmatrix} E^\infty \end{aligned}$$

следват равенствата

$$\begin{pmatrix} A & \tilde{B} \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \tilde{b} \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & \tilde{B} \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Това означава, че

$$\begin{pmatrix} a & \tilde{b} \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \tilde{B} \\ B & C \end{pmatrix}^{-1}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A & \tilde{B} \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{H} \end{pmatrix}.$$

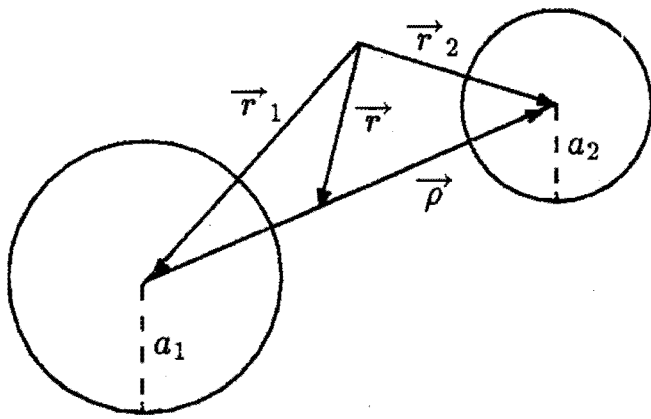
След известни преобразувания получаваме

$$(2.6) \quad \begin{aligned} a &= (A - B^t C^{-1} B)^{-1}, \\ b &= -C^{-1} B (A - B^t C^{-1} B)^{-1}, \\ c &= (C - B A^{-1} B^t)^{-1}. \end{aligned}$$

Да разгледаме сега две сферични частици, които под действие на външни сили и техните моменти се движат транслационно и ротационно във вискозен флуид. Ако на частиците не действуват моменти, то поради линейността на уравненията на Стокс за скоростта на двете частици можем да запишем

$$(2.7) \quad \vec{U}_i = \omega_{i1} \vec{F}_1 + \omega_{i2} \vec{F}_2 \quad (i = 1, 2).$$

Стойностите на компонентите на тензора ω_{ij} , характеризиращ влиянието на j -тата частица върху i -тата, зависят от разстоянието между тях



Фиг. 1

(фиг. 1). Като вземем предвид, че относителното движение на двете сферични частици и движението на техния център на масите се дефинират чрез равенствата

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{d\vec{S}}{dt} &= \vec{U}_2 - \vec{U}_1, \\ \frac{d\vec{r}_c}{dt} &= \frac{\vec{U}_1 + \vec{U}_2}{2}, \end{aligned}$$

можем да запишем формулите

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{dt} &= (\omega_{21} - \omega_{11}) \vec{F}_1 + (\omega_{22} - \omega_{12}) \vec{F}_2, \\ \frac{d\vec{r}_c}{dt} &= \frac{\omega_{21} + \omega_{11}}{2} \vec{F}_1 + \frac{\omega_{22} + \omega_{12}}{2} \vec{F}_2. \end{aligned}$$

От физични съображения е ясно, че когато разстоянието между частиците расте неограничено, хидродинамичното взаимодействие между тях трябва да изчезва, т. е. при $i \neq j$

$$(2.10) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \omega_{ij} = 0,$$

а при $j = i$

$$(2.11) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \omega_{ii} = \frac{\delta}{6\pi\mu a_i}.$$

От получените резултати за динамиката на две сферични частици следва, че за тензора на мобилността ω_{ij} може да се запише формулата

$$(2.12) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{3\pi\mu(a_1 + a_2)} \left[A_{ij}(\rho) \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}}{\rho^2} + B_{ij}(\rho) \left(\delta - \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}}{\rho^2} \right) \right],$$

като при $i \neq j$ съгласно (2.10) и (2.11)

$$(2.13) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} A_{ij}(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} B_{ij}(\rho) = 0,$$

а при $j = i$

$$(2.14) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} A_{ii}(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} B_{ii}(\rho) = 1.$$

От физични съображения следва, че ако радиусите на двете частици са равни ($a_1 = a_2 = a$), то $\omega_{11} = \omega_{22}$ и $\omega_{12} = \omega_{21}$. Ако $\vec{F}_1 = \vec{F}$ и $\vec{F}_2 = 0$, то при големи разстояния между частиците първата ще се движи със скорост

$\vec{U}_1 = \frac{\vec{F}}{6\pi\mu a_1}$ и ще генерира около себе си флуидно течение със скорост

$$(2.15) \quad \vec{v}_1 = \frac{3a}{\rho} \left(1 + \frac{a^2}{3\rho^2} \right) \vec{U}_1 + \frac{3a}{4\rho} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{U}_1 \vec{\rho}}{\rho^2}.$$

Съгласно първия закон на Факсен скоростта \vec{v}_1 на смутеното течение около първата частица индуцира върху втората частица движение със скорост

$$(2.16) \quad \vec{U}_2 = \vec{v}_1(\vec{\rho}) + \frac{a_2^2}{6} \nabla^2 \vec{v}_1(\vec{\rho}).$$

Ще отбележим също, че скоростта $\vec{v}_1(\rho)$ действа на втората частица като силов дипол с интензитет

$$(2.17) \quad S_2 = \frac{20}{3} \pi \mu a_2^3 \left[l(\vec{r}) + \frac{1}{10} a_2^2 \nabla^2 l(\vec{r}) \right],$$

където $l(\vec{r})$ е тензорът на скоростта на деформацията на течението, генерирано от $\vec{v}_1(\vec{\rho})$. От друга страна, силовият дипол, имащ интензитет S_2 , генерира течение около втората частица със скорост

$$(2.18) \quad \vec{v}_2 = S_2 : \nabla I.$$

Това течение променя скоростта \vec{U}_1 на първата частица и за нея се получава

$$(2.19) \quad \vec{U}_1 = \frac{\vec{F}}{6\pi\mu a_1} + \vec{v}_2(\vec{\rho}).$$

Оценките за A_{ij} и B_{ij} ($i, j = 1, 2$) при големи стойности на ρ се намират, като се сравнят равенствата (2.16), (2.19) и (2.12). Окончателните резултати за коефициентите A_{ij} и B_{ij} при големи стойности на $\xi = \frac{2\rho}{a_1 + a_2}$ имат вида

$$A_{11} = 1 - \frac{60\eta^3}{(1+\eta)^4\xi^4} + O(\xi^{-6}), \quad A_{12} = \frac{3}{2\xi} - \frac{2(1+\eta^2)}{(1+\eta)^2\xi^3} + O(\xi^{-7}),$$

$$B_{11} = 1 + O(\xi^{-6}), \quad B_{22} = \frac{3}{4\xi} + \frac{1+\eta^2}{(1+\eta)^2\xi^3} + O(\xi^{-7}),$$

където $\eta = \frac{a_2}{a_1}$. Когато $\eta \rightarrow 0$, влиянието на втората частица върху първата изчезва.

3. ВЛИЯНИЕ НА ПАВ ВЪРХУ ХИДРОДИНАМИЧНОТО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРИ ОБТИЧАНЕ НА ДВА МЕХУРА ОТ ГРАДИЕНТЕН ВИСКОЗЕН ПОТОК

Изменението на повърхностното напрежение σ се определя от разликата на температурата в различните точки на междофазовата граница и наличието на повърхностно-активни вещества (ПАВ) върху нея. Често тези два фактора действуват едновременно. Ще разгледаме само случая,

когато повърхностното напрежение се изменя поради наличието на ПАВ на междуфазовите граници.

Изменението на повърхностното напрежение води до деформиране на сферичната форма на движещите се във вискозно течение флуидни частици. При достатъчно малки концентрации на ПАВ и големи стойности на повърхностното напрежение обаче може да се предположи, че движещите се флуидни частици имат сферична форма. Ще предпологаме, че:

1. Отклонението на концентрацията Γ' на адсорбираното ПАВ на границата от равновесната ѝ стойност Γ_0 е малко в сравнение с Γ_0 , т. е. $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma'$, $\Gamma' \ll \Gamma_0$.

2. Повърхностното напрежение е функция само на концентрацията на ПАВ върху повърхността. Това предположение е валидно само за много малка концентрация в обема.

Движението на повърхностите на флуидните частици се стреми да увеличи повърхностната концентрация Γ в задната им част. Този ефект се неутрализира чрез повърхностна дифузия и чрез обмен на ПАВ между границата и обемния разтвор. Обменът може да бъде извършен чрез бавна дифузия към обема на разтвора или чрез бавна адсорбция — десорбция. Тези три фактора — повърхностна дифузия, бавна дифузия в обема и бавна адсорбция — са разгледани отделно от Левич [125]. Нюман [126] намира, че трите ефекта могат да бъдат разгледани едновременно без допълнителни предположения. Относителната важност на тези три ефекта се отразява на получения коефициент на забавяне.

Да разгледаме два мехура, които се обтичат от несвиваем вискозен флуид при малки числа на Рейнолдс, като движението се описва от ососиметричен неограничен градиентен поток с параболичен профил на скоростта. Освен това в непрекъснатата фаза има ПАВ, които се привличат от фазовата граница и следователно се изменя повърхностното напрежение. ПАВ са разпределени неравномерно по повърхността. За решаването на тази задача са използвани работата на Стимсън и Джефри [127], които разглеждат две твърди частици, движещи се равномерно по посока на оста, свързваща центровете им, в неограничен вискозен флуид, и работата на Калицова — Запрянов [128] за две твърди сферични частици, обтичани от градиентен поток. Ще използваме хидродинамичния модел, предложен в работата на Нюман [126] за флуидна частица, падаща със скорост U във вискозен флуид при малки числа на Рейнолдс и при наличието на ПАВ.

Да предположим, че два мехура се обтичат от ососиметричен градиентен поток с параболичен профил на скоростта при малки числа на Рейнолдс при наличието на ПАВ. Уравнението на Навие — Стокс за стационарни движения на несвиваеми вискозни флуиди е

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v},$$

където ν е кинематичният коефициент на вискозност, а ρ — плътността на флуида. При бавни движения, каквито се разглеждат тук, се пренебрегват конвективните членове, които са малки, и уравнението в приближение на Стокс има вида

$$(3.1) \quad \nu \Delta \vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Уравнението на непрекъснатостта е

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Кинематичните условия на границата между две течни фази са:

$$a) v_t^{(1)} = v_t^{(2)},$$

т. е. няма хлъзгане между частиците на двете фази (тук v_t е тангенциалната компонента на скоростта);

$$(3.2) \quad б) v_n^{(1)} = v_n^{(2)} = 0,$$

където v_n е нормалната компонента на скоростта. Това е условие за непротичане, т. е. двете фази не се смесват.

Поради действието на ПАВ върху междуфазовата граница се появява тангенциална сила, която е равна на

$$P_t = \text{grad}_S \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \text{grad}_S \Gamma$$

и е насочена по допирателната към повърхността. Тук grad_S е повърхностният градиент. Предполагаме, че σ е функция само на Γ , т. е. $\sigma = \sigma(\Gamma)$.

Следователно динамичните условия, които се поставят на границата между две течни фази при наличие на ПАВ, са:

$$a) P_{nn} - P'_{nn} = p_\sigma,$$

където $p_\sigma = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ е капилярното налягане (тук R_1 и R_2 са радиусите на кривината на повърхността), а P_{nn} — нормалната компонента на тензора на напреженията;

$$(3.3) \quad б) P_{tt} - P'_{tt} = p_t,$$

където P_{tt} е тангенциалната компонента на тензора на напреженията, а p_t е тангенциалната сила на повърхността.

За да се намерят повърхностните сили p_σ и p_t , е необходимо да се намери разпределението на ПАВ по повърхността. Това разпределение се обуславя от няколко фактора. ПАВ на повърхността се увеличава от движението на течността и възниква конвективен поток на ПАВ по повърхността:

$$j_{\text{пов}} = \Gamma v_t,$$

където v_t е тангенциалната скорост на течността на границата в резултат от разликите в концентрацията на ПАВ. На повърхността възниква дифузионен поток на ПАВ:

$$j_{\text{диф}} = -D_S \text{grad}_S \Gamma,$$

където D_S е коефициентът на повърхностна дифузия.

Ако ПАВ е разтворимо в течността, то във всяка точка от повърхността може да се извърши преход на веществото от повърхностната фаза в обемния разтвор или обратно. Нека означим с j_n потока от ПАВ от единица повърхност към обемната фаза или обратно. Тогава законът за запазване на ПАВ има вида

$$j_n = \text{div}_S (j_{\text{пов}} + j_{\text{диф}}),$$

или

$$(3.4) \quad j_n = \text{div}_S (\Gamma v_t) - \text{div}_S (D_S \text{grad}_S \Gamma).$$

Тук div_S е повърхностната дивергенция.

За решението на задачата е необходимо съвместното решаване на уравнението на движение, закона за запазване на ПАВ и граничните условия.

Ако въведем цилиндрична координатна система (r, φ, z) с център, лежащ на отсечката, свързваща центровете на двете сфери, и ос Oz , съдържаща центровете им, то разглеждайки градиентен ососиметричен неограничен поток с параболичен профил на скоростта, граничното условие в безкрайност е

$$v_r = 0, \quad v_z = U_\infty = Kr^2,$$

където K е константа. Тъй като разглеждаме ососиметрична задача, то $v_\varphi = 0$, т. е. задачата не зависи от φ .

Да въведем бисферична координатна система (ξ, η, φ) , чиято връзка с цилиндричната координатна система се дава от равенствата

$$r = c \frac{\sin \xi}{\text{ch } \eta - \cos \xi}, \quad z = c \frac{\text{sh } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \xi},$$

където $c > 0$, $0 \leq \xi \leq \pi$, $-\infty < \eta < \infty$.

Нека сферата с радиус a лежи в отрицателното полупространство $z < 0$, а сферата с радиус b лежи в положителното полупространство $z > 0$. Тогава в бисферични координати за сферата с радиус a имаме

$$\eta = \eta_1 < 0 \quad \left(a = c |\text{csch } \eta_1| = \frac{c}{|\text{sh } \eta_1|} \right),$$

а за сферата с радиус b —

$$\eta = \eta_2 > 0 \quad \left(b = c |\text{csch } \eta_2| = \frac{c}{|\text{sh } \eta_2|} \right).$$

Тъй като задачата е ососиметрична, можем да въведем функция на тока Ψ :

$$(3.5) \quad v_\xi = -\frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad v_\eta = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi},$$

където $H_1 = H_2 = \frac{c}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}$, $H_3 = \frac{c \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}$ са метричните коефициенти на Ламе.

От зависимостта $v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$ следва, че условието в безкрайност има вида

$$(3.6) \quad \Psi = -Kc^4 \frac{\sin^4 \xi}{4(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^4}, \quad \xi^2 + \eta^2 \rightarrow 0.$$

От условието за непротичане (3.2) получаваме

$$(3.7) \quad \Psi = 0 \quad \text{при } \eta = \eta_1, \eta = \eta_2.$$

Освен това изискваме $\Psi = 0$ при $\xi = 0, \xi = \pi$.

В криволинейна координатна система тангенциалната компонента на тензора на напреженията е

$$P_{12} = P_{21} = \mu^* \left\{ \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right\}.$$

Следователно, използвайки (3.5) в бисферични координати, получаваме

$$P_{\xi\eta} = \mu^* \left\{ \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^3}{c^3 \sin \xi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^3}{c^3 \sin \xi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}{c^3 \sin \xi} \cdot \frac{2 \sin^2 \xi + 1 - \cos \xi \operatorname{ch} \eta}{\sin \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}{c^3 \sin \xi} \cdot 3 \operatorname{sh} \eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right\},$$

където μ^* е динамичният коефициент на вискозност на флуида.

Нека $\Gamma = \Gamma^0 + \Gamma'$, където Γ^0 е равновесната стойност на повърхностната концентрация на ПАВ, а Γ' — отклонението от нея. Ще предположим, че Γ' е много по-малко от Γ^0 . Имаме представянето

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} (\Gamma - \Gamma^0),$$

където $\frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma}$ е константа или $\sigma = \sigma_0 + \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \Gamma'$.

Условието (3.3) е

$$P_{\xi\eta} = \operatorname{grad}_S \sigma \quad \text{при } \eta = \eta_1, \eta = \eta_2$$

и го записваме във вида

$$(3.8) \quad \mu^* \left\{ \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^3}{c^3 \sin \xi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^3}{c^3 \sin \xi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}{c^3 \sin \xi} \frac{2 \sin^2 \xi + 1 - \cos \xi \operatorname{ch} \eta}{\sin \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}{c^3 \sin \xi} \cdot 3 \operatorname{sh} \eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right\} = \pm \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma'}{\partial \xi}, \quad \eta = \eta_1, \eta = \eta_2.$$

Тук „+“ е за $\eta = \eta_1$, а „-“ е за $\eta = \eta_2$.

От векторното уравнение (3.1) елиминираме налягането p и използвайки връзките (3.5), получаваме уравнението

$$(3.9) \quad D^4(\Psi) = 0,$$

където $D^4 = D^2(D^2)$ и

$$D = \frac{H_3}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \right\}$$

или в бисферични координати

$$D^2 = \frac{\operatorname{ch} \eta - \mu}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\operatorname{ch} \eta - \mu) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (\operatorname{ch} \eta - \mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\},$$

където $\mu = \cos \xi$.

Да разгледаме уравнението за съхранение на ПАВ (3.4). Големината на потока от ПАВ от повърхността към обемната фаза j_n се определя от по-бавния от двата процеса адсорбция — десорбция или пренасяне на молекулите на ПАВ от обема към повърхността.

Следвайки Левич, ще изразим j_n чрез дебелината на дифузионния слой на Нернст. Имаме връзката

$$j_n = D(C_b - C_\delta)/\delta,$$

където C_b е концентрацията на ПАВ в обемния разтвор, C_δ е концентрацията в разтвора близо до границата, а δ — дебелината на дифузионния слой на Нернст. Последното уравнение можем да запишем във вида

$$(3.10) \quad j_n = (D/\delta)(\Gamma^0 - \Gamma_\delta)/(\partial\Gamma/\partial C)_{\text{eq}},$$

където $(\partial\Gamma/\partial C)_{\text{eq}}$ е константа.

Сега, разглеждайки механизма на адсорбция, можем да запишем следната линейна връзка:

$$(3.11) \quad j_n = -\alpha(\Gamma - \Gamma_\delta).$$

Елиминираме Γ_δ от (3.10) и (3.11) и получаваме

$$(3.12) \quad j_n = -\alpha D \Gamma' / [D + \alpha \delta (\partial\Gamma/\partial C)_{\text{eq}}].$$

Разглеждаме първия член в дясната страна на (3.4):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_S(\Gamma v_t) &= \operatorname{div}_S[(\Gamma^0 + \Gamma')v_t] = (\Gamma^0 + \Gamma') \operatorname{div}_S v_t + v_t \operatorname{grad}_S(\Gamma^0 + \Gamma') \\ &= \Gamma^0 \operatorname{div}_S v_t + \operatorname{div}_S(\Gamma' v_t) + v_t \operatorname{grad}_S \Gamma^0 \approx \Gamma^0 \operatorname{div}_S v_t, \end{aligned}$$

защото Γ' е малко и v_t е малко поради бавното движение, следователно $\Gamma' v_t$ е малка величина от втори порядък и я пренебрегваме, а освен това Γ^0 е константа.

Вторият член в дясната страна на (3.4) е

$$\operatorname{div}_S(D_S \operatorname{grad}_S \Gamma) = D_S \operatorname{div}_S \operatorname{grad}_S \Gamma'.$$

Тогавата (1.4) добива вида

$$(3.13) \quad j_n = \Gamma^0 \operatorname{div}_S v_t - D_S \operatorname{div}_S \operatorname{grad}_S \Gamma'.$$

Комбинираще уравненията (3.12) и (3.13) и получаваме уравнение за Γ' :

$$-\alpha D\Gamma' / [D + \alpha\delta(\partial\Gamma/\partial C)_{\text{eq}}] = \Gamma^0 \operatorname{div}_S v_t - D_s \operatorname{div}_S \operatorname{grad}_S \Gamma'$$

или, ако положим

$$K_i = -\alpha D / [D + \alpha\delta(\partial\Gamma_i/\partial C)_{\text{eq}}], \quad i = 1, 2,$$

то можем да запишем уравнение за изменението на повърхностната концентрация Γ'_i върху всяка от частиците $\eta = \eta_i$:

$$(3.14) \quad K_i \Gamma'_i = \Gamma_i^0 \operatorname{div}_S v_t^i - D_S \operatorname{div}_S \operatorname{grad}_S \Gamma'_i, \quad i = 1, 2.$$

За да обезразмерим уравненията, да вземем за характерен линеен размер C , а за характерна скорост $U = \frac{\mu^*}{\rho C}$. Размерността на функцията на тока Ψ е UC^2 . Разделяме двете страни на (3.6) на UC^2 и получаваме

$$(3.15) \quad \Psi = -\frac{1}{4} \frac{\sin^4 \xi}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^4}, \quad \xi^2 + \eta^2 \rightarrow 0$$

(тук предполагаме, че $\frac{KC}{U} = 1$). Делим двете страни на (3.7) също на UC^2 и получаваме

$$(3.16) \quad \Psi = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_1, \eta = \eta_2.$$

За да обезразмерим (3.8), умножаваме двете страни по $\frac{C}{\sigma_0}$ и получаваме

$$(3.17) \quad C_a \left\{ \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^3}{\sin \xi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^3}{\sin \xi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}{\sin \xi} \frac{2 \sin^2 \xi + 1 - \cos \xi \operatorname{ch} \eta}{\sin \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}{\sin \xi} \cdot 3 \operatorname{sh} \eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right\} = \pm (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi) \frac{\partial \sigma^\delta}{\partial \Gamma} \frac{\partial \Gamma'}{\partial \xi}, \quad \eta = \eta_1, \eta = \eta_2.$$

Тук $C_a = \frac{\mu^* U}{\sigma_0}$ се нарича капиларно число, където σ_0 е равновесната стойност на повърхностното напрежение и

$$\sigma^\delta = \frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + \frac{\partial \sigma^\delta}{\partial \Gamma} \Gamma'.$$

Умножаваме уравнението (3.9) по $\frac{C^2}{U}$ и получаваме

$$(3.18) \quad D^4(\Psi) = 0,$$

където

$$D^2 = (\operatorname{ch} \eta - \mu) \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\operatorname{ch} \eta - \mu) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (\operatorname{ch} \eta - \mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\}, \quad \mu = \cos \xi.$$

Умножаваме уравнението (3.14) по $\frac{C}{U\Gamma_x}$ и получаваме безразмерното уравнение

$$(3.19) \quad K_i \Gamma'_i = \Gamma_i^0 \operatorname{div}_S v_i^i - D_S \operatorname{div}_S \operatorname{grad}_S \Gamma'_i, \quad i = 1, 2,$$

където

$$\operatorname{div}_S v_i^i = \frac{(\operatorname{ch} \eta_i - \cos \xi)^2}{\sin \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(v_i^i \frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} \eta_i - \cos \xi} \right),$$

$$\operatorname{div}_S \operatorname{grad}_S \Gamma'_i = \frac{(\operatorname{ch} \eta_i - \cos \xi)^2}{\sin \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sin \xi \frac{\partial \Gamma'_i}{\partial \xi} \right).$$

Тук сме приели, че $K = 1$, $C = 1$.

Нека сега да въведем функцията $\bar{\Psi}$, която е свързана с Ψ чрез следното уравнение:

$$(3.20) \quad \bar{\Psi} = \Psi + \frac{1}{4} \frac{\sin^4 \xi}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^4},$$

и клони към 0 в безкрайност (вж. 3.15). Тогава търсим точно решение на задачата във вида

$$(3.21) \quad \bar{\Psi} = (\operatorname{ch} \eta - \mu)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\eta) V_n(\mu),$$

където

$$(3.22) \quad V_n(\mu) = P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu),$$

(3.23)

$$U_n(\eta) = A_n \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta + B_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta + C_n \operatorname{ch} \left(n - \frac{3}{2} \right) \eta + D_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta.$$

Тук $P_n(\mu)$ е полиномът на Лъожандър от степен n . Като вземем предвид (3.20), от (3.16) получаваме

$$(3.24) \quad \bar{\Psi} = \frac{1}{4} \frac{\sin^4 \xi}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^4}, \quad \eta = \eta_1, \eta = \eta_2,$$

или

$$(3.25) \quad \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\eta) V_n(\mu) = \frac{1}{4} \frac{\sin^4 \xi}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^{5/2}}, \quad \eta = \eta_1, \eta = \eta_2.$$

След дълги, но стандартни пресмятания, включващи използването на общото решение и граничните условия, се получава безкрайна система от линейни уравнения за коефициентите A_n , B_n , C_n , D_n , E_n^1 и E_n^2 . Тази система се решава числено. Като пресметнем приближено неизвестните коефициенти, изчисляваме съпротивлението, което изпитват двете частици, от формулите

$$F_1 = -2\sqrt{2}\pi \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(A_n - B_n + C_n - D_n) \quad \text{за } \eta = \eta_1 < 0,$$

$$F_2 = -2\sqrt{2}\pi \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(A_n + B_n + C_n + D_n) \quad \text{за } \eta = \eta_2 > 0.$$

Получените числени резултати показват, че възпрепятстването на мобилността на междофазовите граници на частиците нараства (чрез механизма на повърхностната дифузия на ПАВ), когато радиусите на частиците растат и разстоянието между тях намалява.

Настоящите изследвания са извършени в изпълнение на договор № 72/91, сключен с Министерството на образованието и науката.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein. — *Ann. Phys.*, **19**, 1906, 289.
2. A. Einstein. — *Ann. Phys.*, **34**, 1906, 591.
3. R. Rutgers. — *Rheol. Acta*, **2**, 1962, 202; 305.
4. D. G. Thomas. — *J. Colloid Sci.*, **20**, 1965, 267.
5. G. B. Jeffery. — *Proc. Roy. Soc. (London)*, A **102**, 1922, 161.
6. G. I. Taylor. — *Proc. Roy. Soc. (London)*, A **138**, 1932, 41.
7. G. I. Taylor. — *Proc. Roy. Soc. (London)*, A **146**, 1934, 501.
8. G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1970.
9. M. Smoluchovski. — *Bull. Acad. Sci. Cracow*, **1a**, 1911, 28.
10. J. M. Burgers. — *Proc. Koninkl. Akad. Wetenschap (Amsterdam)*, **44**, 1941, 1045; **45**, 1942, 9.
11. G. I. Kynch. — *J. Fluid Mech.*, **5**, 1959, 193.
12. H. Hasimoto. — *J. Fluid Mech.*, **5**, 1959, 317.
13. E. Guth and R. Simha. — *Kolloid Z.*, **74**, 1936, 266.
14. N. Saito. — *J. Phys. Soc. Japan*, **7**, 1952, 447.
15. V. Vand. — *J. Phys. and Colloid Chem.*, **52**, 1948, 277.
16. M. Money. — *J. Colloid Sci.*, **6**, 1951, 162.
17. R. Simha. — *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **42**, 1942, 409.
18. H. De Bruijn. — *Discussions Faraday Soc.*, **11**, 1951, 86.
19. H. Brenner. *Rheology of two-phase systems*. — *Ann. Rev. of Fluid Mech.*, **2**, 1970, 137.
20. H. Brenner. *Suspension rheology*. — In: *Progress in Heat and Mass Transfer*, v. 5, 1972, 89.
21. H. Brenner. *Rheology of a dilute suspension of axisymmetric Brownian particles*. — *Int. J. Multiphase Flow*, **1**, 1974, 195.
22. R. G. Cox and H. Brenner. — *Chem. Eng. Sci.*, **26**, 1971, 65.
23. R. Simha. — *J. Appl. Phys.*, **23**, 1952, 1020.
24. J. Happel. — *J. Appl. Phys.*, **28**, 1957, 1288.
25. J. Happel. — *A. I. Ch. E. Jour.*, **4**, 1958, 197.
26. S. Kuwabara. — *J. Phys. Soc. Japan*, **14**, 1959, 527.
27. G. Gal-Or and S. Walso. — *Chem. Eng. Sci.*, **23**, 1968, 1431.
28. H. C. Brinkman. — *Appl. Sci. Res.*, A **1**, 1949, 27.
29. C. K. W. Tam. — *J. Fluid Mech.*, **38**, 1969, 537.
30. T. S. Lundgren. — *J. Fluid Mech.*, **51**, 1972, 273.
31. S. Childress. — *J. Chem. Phys.*, **56**, 1972, 2527.
32. I. D. Howells. — *J. Fluid Mech.*, **64**, 1974, 449.
33. Yu. A. Buyevich. — *J. Fluid Mech.*, **49**, 1971, 489; **52**, 1971, 345; **56**, 1972, 313.
34. Yu. A. Buyevich. — *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhid. Gaza*, **5**, 1971, 104.
35. Yu. A. Buyevich and V. G. Markov. — *Prikl. Mathem. Mekh.*, **36**, 1972, 480.

36. Yu. A. Buyevich and V. G. Markov. — *Prikl. Mathem. Mekh.*, **37**, 1973, 883, 1059.
37. K. K. Sirkar. — *Chem. Eng. Sci.*, **32**, 1977, 1127.
38. C. W. Pyun and M. Fixman. — *J. Chem. Phys.*, **41**, 1964, 937.
39. G. K. Batchelor. — *J. Fluid Mech.*, **41**, 1970, 545.
40. G. K. Batchelor. — *J. Fluid Mech.*, **52**, 1972, 245.
41. E. Wacholder. — *Chem. Eng. Sci.*, **28**, 1973, 1447.
42. S. Haber and G. Hetsroni. — *J. Colloid and Interface Sci.*, **79**, 1981, 56.
43. G. Saffman. — *Stud. Appl. Math.*, **52**, 1973, 115.
44. L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1959.
45. J. M. Peterson and M. Fixman. — *J. Chem. Phys.*, **39**, 1963, 2516.
46. G. K. Batchelor and J. T. Green. — *J. Fluid Mech.*, **56**, 1972, 375.
47. G. K. Batchelor and J. T. Green. — *J. Fluid Mech.*, **56**, 1972, 401.
48. G. K. Batchelor. — *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **5**, 1974, 227.
49. G. K. Batchelor. — *J. Fluid Mech.*, **46**, 1971, 813.
50. G. K. Batchelor. — *J. Fluid Mech.*, **74**, 1976, 1.
51. Z. Hashin. — *Appl. Mech. Rev.*, **17**, 1964, 1.
52. J. D. Oldroyd. — *Proc. Roy. Soc., A* **218**, 1953, 122.
53. J. D. Oldroyd. — *Proc. Roy. Soc., A* **245**, 1958, 278.
54. J. D. Goddard and C. Miller. — *J. Fluid Mech.*, **28**, 1967, 657.
55. R. Roscoe. — *J. Fluid Mech.*, **28**, 1975, 273.
56. G. K. Batchelor. — *J. Fluid Mech.*, **46**, 1970, 813.
57. R. S. Rivlin and J. L. Eriksen. — *Arch. Rational Mech. Anal.*, **4**, 1955, 323.
58. J. G. Oldroyd. — *Proc. Roy. Soc., A* **200**, 1950, 523.
59. G. L. Hand. — *Arch. Rotational Mech. Anal.*, **7**, 1961, 81.
60. R. J. Gordon and W. R. Schwalter. — *Trans. Soc. Rheol.*, **16**, 1972, 79.
61. G. L. Hand. — *J. Fluid Mech.*, **13**, 1962, 33.
62. W. R. Schowalter, C. E. Chaffey, H. Brenner. — *J. Coll. Sci.*, **26**, 1968, 152.
63. N. A. Frankel and A. Acrivos. — *J. Fluid Mech.*, **44**, 1970, 65.
64. D. Barthes-Biesel and A. Acrivos. — *Int. J. Multiphase Flow*, **1**, 1973, 1.
65. C. J. Lin, J. H. Peery and W. R. Schowalter. — *J. Fluid Mech.*, **44**, 1970, 1.
66. Lord Rayleigh. — *Phil. Mag.*, **34**, 1892, 481.
67. H. Levine. — *J. Inst. Math. Appl.*, **2**, 1966, 12.
68. M. Zuzovsky, H. Brenner. — *J. Appl. Math. Phys.*, **28**, 1977, 979.
69. D. R. McKenzie and R. C. McPhedran. — *Proc. Roy., Soc. A*, **14**, 1975, 25.
70. J. D. Jeffery. — *Proc. Roy. Soc. A*, **335**, 1973, 355.
71. J. D. Jeffery. — *Proc. Roy. Soc. A*, **338**, 1974, 503.
72. W. R. O'Brien. — *J. Fluid Mech.*, **91**, 1979, 17.
73. C. K. Batchelor. — *J. Fluid Mech.*, **74**, 1976, 1.
74. C. K. Batchelor. — *J. Fluid Mech.*, **119**, 1982, 379.
75. C. K. Batchelor and S. C. Wen. — *J. Fluid Mech.*, **124**, 1982, 495.
76. F. J. Fueillebois. — *J. Fluid Mech.*, **139**, 1984, 145.
77. A. Acrivos. — *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **17**, 1985, 91.
78. C. K. Batchelor. — *J. Fluid Mech.*, **83**, 1977, 97.
79. B. U. Felderhof. — *Physica Ser., A* **89**, 1977, 373.
80. H. Giesekus. — *Rheol. Acta*, **2**, 1962, 50.
81. E. J. Hinch and L. G. Leal. — *J. Fluid Mech.*, **52**, 1972, 683.
82. L. G. Leal and E. J. Hinch. — *Rheol. Acta*, **12**, 1973, 127.
83. J. M. Rallison. — *J. Fluid Mech.*, **84**, 1978, 237.
84. W. B. Russel. — *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **13**, 1981, 425.
85. M. Z. Smoluchovski. — *Phys. Chem.*, **19**, 1917, 129.
86. L. M. Hocking and P. R. Jonas. — *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **96**, 1970, 722.
87. A. S. G. Curtis and L. M. Hocking. — *Trans. Faraday Soc.*, **66**, 1970, 1381.
88. T. G. M. Van de Ven and S. G. Mason. — *Colloid and Polymer Sci.*, **255**, 1977, 468; 794.
89. G. R. Zeichner and W. R. Schowalter. — *AIChE. J.*, **23**, 1977, 243.
90. D. L. Feke and W. R. Schowalter. — *J. Fluid Mech.*, **133**, 1983, 17.

91. B. V. Derjaguin and V. M. Muller. — Dokl. Akad. Nauk SSSR, 176, 1967, 738.
92. W. R. Schowalter. — Ann. Rev. Fluid Mech., 16, 1984, 245.
93. C. S. Wen and G. K. Batchelor. — Scientia Sinica, Ser. A 23, 1985, 172.
94. D. J. Jeffery and A. Acrivos. — A. I. Ch. E. J., 22, 1976, 417.
95. R. Herczynski and Pienkowska. — Ann. Rev. Fluid Mech., 12, 1980, 237.
96. L. J. Walpone. — Quart. J. Mech. and Appl. Mech., 25, 1971, 153.
97. J. B. Keller, A. Rubinfeld and J. E. Molyneux. — J. Fluid Mech., 30, 1967, 97.
98. M. J. Beran. Statistical Continuum Theories, 1968, New York: Interscices.
99. Z. Hashin and S. Shtrikman. — J. Mech. Phys. Solid, 11, 1963, 127.
100. H. L. Goldsmith and G. S. Mason. The microrheology of dispersions in rheology (Edited by Eirich, F. R.), vol. 4, Academic Press, N. Y., 1967.
101. H. Wang and R. Skalak. — J. Fluid Mech., 38, 1969, 75.
102. R. Skalak, P. H. Chen and S. Chien. — Biorheology, 9, 1972, 67.
103. P. M. Bungay and H. Brenner. — Int. J. Multiphase Flow, 1, 1973, 25.
104. H. Schmid Schonbein and R. Wells. — Science, 165, 1969, 288.
105. H. L. Goldsmith and R. Skalak. — Ann. Rev. Fluid Mech., 7, 1975, 213.
106. З. Запряннов. — Год. Соф. унив., ФМИ, т. 83, кн. 2, 1990.
107. R. Roscoe. — J. Fluid Mech., 28, 1967, 273.
108. M. J. Lighthil. — J. Fluid Mech., 34, 1968, 113.
109. J. M. Fitz-Gerald. — Proc. Roy. Soc., B 174, 1969, 193.
110. D. Barthes-Biesel. — J. Fluid Mech., 100, 1980, 831.
111. P. Brun. — Biorheology, 17, 1980, 419.
112. D. Barthes-Biesel and H. Sgaier. — J. Fluid Mech., 160, 1985, 119.
113. Р. И. Нигматулин. Основы механики гетерогенных сред, М., Наука, 1978, 336.
114. В. Г. Левиц и В. П. Масников. — П. М. М., 30, 1966, 461.
115. E. A. Mason, A. P. Malinauskas, R. B. Evans. — J. Chem. Phys., 46, 1967, 3199.
116. В. В. Струмский. Гидродинамические проблемы технологических процессов, М., Наука, 1988.
117. N. F. Sather and K. J. Lee. — In Progress in Heat and Mass Transfer, 5, 1972, 575.
118. H. Ogura. — I. E. E. E. Trans. Inf. Theory, 18, 1972, 473.
119. C. Christov and K. Markov. — Int. J. Solid Structures, 21, 1985, 1197.
120. J. Happel and H. Brenner. Low Reynolds number hydrodynamics, N. Y., Prentice-Hall, 1965.
121. N. A. Brancl and A. Acrivos. — Chem. Eng. Sci., 22, 1967, 847.
122. D. A. McQuarrie. Statistical Mechanics, Harper and Row, 1976.
123. T. G. M. Van De Ven. Colloidal Hydrodynamics, Academic Press, 1989.
124. W. B. Russel, A. Gast. J. Chem. Phys. 84, 1986, 35.
125. V. G. Levich. Physicochemical Hydrodynamics, Prentice-Hall, Englewood Clift, N. Y., 1962.
126. J. Newman. — Chem. Eng. J., 5, 1973, 25.
127. M. Stimson, G. Jeffery. — Proc. R. Soc. London, 111, 1926, 110.
128. P. Kalitzova-Kurteva, Z. Запряннов. Sixth Congress of Mechanics, 1989, 25.

Получена 04.02.1993