ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 84, 1990

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 84, 1990

О ТЕОРЕМАХ БОРСУКА–УЛАМА И ЛЮСТЕРНИКА–ШНИРЕЛЬМАНА–БОРСУКА

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ, ВЛАДИМИР НИКИФОРОВ

Николай Хаджииванов, Владимир Никифоров. О ТЕОРЕМАХ БОРСУКА–УЛАМА И ЛЮСТЕРНИКА–ШНИРЕЛЬМАНА–БОРСУКА

Основной результат: Если $f : X \to M^n$ гомотопически тривиальное отображение $(n-1)$-связного пространства X с инволюцией φ в n-мерное многообразие M^n, то существует точка x, для которой $f(x) = f(\varphi(x))$.

Nikolay Khadzhiivanov, Vladimir Nikiforov. ON THE THEOREMS OF BORSUK–ULAM AND LJUSTERNIK–SHNIRELMAN–BORSUK

The main result: Every homotopically trivial map $f : X \to M^n$ from the $(n-1)$-connected space X with involution φ to the n-dimensional topological manifold M^n identifies a pair of points $(x, \varphi(x))$.

1. ВВЕДЕНИЕ

С. Улам сформулировал, а К. Борсук [1] доказал в начале 30-ых годов следующую замечательную теорему:

Теорема Борсука–Улама. *Для всякого непрерывного отображения $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ n-мерной сферы S^n в n-мерное эвклидово пространство $\mathbb{R}^n$ найдется такая точка x_0, что $f(x_0) = f(-x_0)$.*

Е. Щепин [2] показал, что можно заменить $\mathbb{R}^n$ n-мерным топологическим многообразием, сузив класс отображений:

Теорема Щепина. *Если непрерывное отображение $f : S^n \to M^n$ в*

n-мерное многообразие M^n гомотопно постоянному, найдется такая точка x_0, что $f(x_0) = f(-x_0)$.

Это предложение обобщает теорему Борсука–Улама, так как очевидно, что любое отображение $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ гомотопно постоянному.

Обобщим теорему Щепина, заменяя S^n $(n-1)$-связным пространством, а антиподальное отображение $x \mapsto -x$ — произвольной инволюцией:

Теорема 1. *Пусть X — $(n-1)$-связное топологическое пространство с инволюцией φ. Если непрерывное отображение $f : X \to M^n$ гомотопно постоянному, найдется такая точка x_0, что $f(x_0) = f(\varphi(x_0))$.*

Напомним: топологическое пространство X n-связно, если всякое непрерывное отображение $\chi : S^n \to X$ гомотопно постоянному, а непрерывное отображение $\varphi : X \to X$ — инволюция, если $\varphi(\varphi(x)) = x$.

Сфера S^n — $(n-1)$-связна, а антиподальное отображение $x \mapsto -x$ — инволюция сферы S^n. Поэтому теорема 1 действительно обобщает теорему Щепина.

С рассматриваемой проблематикой связана и следующая теорема, доказанная Люстерником–Шнирельманом [3] и Борсуком [1]:

Теорема Люстерника–Шнирельмана–Борсука. *Если сфера S^n покрыта $n+1$ замкнутыми множествами, хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{x_0, -x_0\}$.*

Янг [4] и Яворовский [5] обобщили эту теорему следующим образом:

Теорема Янга–Яворовского. *Для любой инволюции φ сферы S^n и любого покрытия S^n $n+1$ замкнутыми множествами хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{x_0, \varphi(x_0)\}$.*

Обобщим теорему Янга–Яворовского следующим образом:

Теорема 2. *Для любой инволюции φ $(n-1)$-связного метрического пространства X и любого покрытия пространства X $n+1$ замкнутыми множествами, хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{x_0, \varphi(x_0)\}$.*

Очевидно любая инволюция топологического пространства является гомеоморфизмом, но обратное не верно. При $n = 2$ более сильний результат по сравнению с теоремой Янга–Яворовского получил Шклярский:

Теорема Шклярского. *Для любого гомеоморфизма $h : S^2 \to S^2$ и любого покрытия сферы S^2 тремя замкнутыми множествами, хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{x_0, h(x_0)\}$.*

Здесь докажем одно существенное обобщение этой теоремы:

Теорема 3. *Если метрический континуум X стягиваем относительно S^1, а $\varphi : X \to X$ и $\psi : X \xrightarrow{\text{на}} X$ — непрерывные отображения, тогда для любого покрытия пространства X тремя замкнутыми множествами, хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{\varphi(x_0), \psi(x_0)\}$.*

Напомним, что пространство X стягиваемо относительно S^1, если всякая непрерывная функция $\chi : X \to S^1$ гомотопна постоянной. Сфера S^n стягиваема относительно S^1, тогда и только тогда, когда $n \geqq 2$. Поэтому, даже в частном случае, когда $X = S^2$ и $\psi = \mathrm{id}$, теорема 3 более сильна по сравнению с теоремой Шклярского, так как $\varphi : X \to X$ — произвольное непрерывное отображение, а не обязательно гомеоморфизм.

Результаты докладованы на VI-ой конференции БМД в Варне, 6–9 апреля 1977 г.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Лемма 1. *Пусть φ — инволюция $(n-1)$-связного пространства X. Тогда существует такое непрерывное отображение $p_n : S^n \to X$, что $p_n(y) = \varphi(p_n(-y))$ для любого $y \in S^n$.*

Докажем это утверждение индукцией по n. Сначала введем несколько обозначений. Пусть

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}, \quad S^n_+ = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geqq 0\},$$
$$S^n_- = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \leqq 0\}.$$

Очевидно, что $S^{n-1} = S^n_+ \cap S^n_-$.

Утверждение имеет смысл и при $n = 0$, если считать, что любое пространство (-1)-связно. Имеем $S^0 = \{-1, 1\}$. Выберем $p_0(-1)$ произвольно в X и положим $p_0(1) = \varphi(p_0(-1))$. Очевидно $p_0 : S^0 \to X$ — непрерывное отображение и $p_0(y) = \varphi(p_0(-y))$ для любого $y \in S^0$, т. е. для $y = 1$ и $y = -1$.

Допустим, что $n \geqq 1$ и утверждение верно для $n-1$. Пусть X — $(n-1)$-связное пространство с инволюцией φ. Пространство X $(n-2)$-связно и, согласно индуктивному предположению, существует такое непрерывное отображение $p_{n-1} : S^{n-1} \to X$, что $p_{n-1}(y) = \varphi(p_{n-1}(-y))$ при $y \in S^{n-1}$. Пространство X $(n-1)$-связно и, следовательно, отображение p_{n-1} гомотопно постоянному, так что его можно продолжить на n-мерный шар с границей S^{n-1}. Значит существует непрерывное продолжение $p_n^- : S^n_- \to X$ отображения p_{n-1}. Для любой точки $y \in S^n_+$ положим $p_n^+(y) = \varphi(p_n^-(-y))$.

Отображения p_n^+ и p_n^- совпадают на множестве $S^n_- \cap S^n_+ = S^{n-1}$. Действительно, пусть $y \in S^{n-1}$. Так как $y \in S^n_- \cap S^{n-1}$, то $p_n^-(y) = p_{n-1}(y)$, а из $-y \in S^{n-1}$ следует, что $p_n^-(-y) = p_{n-1}(-y)$. Из определения p_n^+ имеем $p_n^+(y) = \varphi(p_n^-(-y))$ и таким образом $p_n^+(y) = \varphi(p_{n-1}(-y))$. По определению p_{n-1} имеет место равенство $\varphi(p_{n-1}(-y)) = p_{n-1}(y)$. Окончательно $p_n^+(y) = p_{n-1}(y) = p_n^-(y)$ на S^{n-1}.

Определим искомое отображение $p_n : S^n \to X$ как следует: $p_n(y) = p_n^-(y)$ при $y \in S^n_-$ и $p_n(y) = p_n^+(y)$ при $y \in S^n_+$. Это определение, согласно только-что доказанному, корректно и, кроме того, отображение p_n непрерывно.

А сейчас докажем, что $p_n(y) = \varphi(p_n(-y))$ при $y \in S^n$. Действительно, если $y \in S^n_+$, тогда $p_n(y) = p_n^+(y) = \varphi(p_n^-(-y)) = \varphi(p_n(-y))$, а если $y \in S^n_-$, согласно только что доказанному, $p_n(-y) = \varphi(p_n(y))$ и следовательно $\varphi(p_n(-y)) = \varphi(\varphi(p_n(y))) = p_n(y)$.

Индуктивный шаг сделан и лемма 1 доказана.

Докажем теорему 1 с помощью леммы и теоремы Щепина.

Пусть X — $(n-1)$-связное топологическое пространство с инволюцией φ, а $f : X \to M^n$ непрерывное отображение пространства X в n-мерное топологическое многообразие M^n и отображение f — гомотопно постоянному отображению.

Согласно лемме существует такое непрерывное отображение $p_n : S^n \to X$, что $p_n(y) = \varphi(p_n(-y))$ при $y \in S^n$. Введем непрерывное отображение $F = fp_n$ сферы S^n в M^n. Оно гомотопно постоянному, потому что этим свойством по условию обладает отображение f. Тогда к ним можно применить теорему Шепина и таким образом заключить, что найдется точка $y_0 \in S^n$, для которой $F(y_0) = F(-y_0)$, т. е. $f(p_n(y_0)) = f(p_n(-y_0))$. Положим $x_0 = p_n(y_0)$ и так как $p_n(-y_0) = \varphi(p_n(y_0)) = \varphi(x_0)$, то полученное равенство можно записать следующим образом: $f(x_0) = f(\varphi(x_0))$.

Теорема 1 доказана. Она обобщает теорему Шепина, потому что сфера S^n — $(n-1)$-связна.

Так как n-мерное многообразие $\mathbf{R}^n$ стягиваемо в точку, то любое отображение $f : X \to \mathbf{R}^n$ гомотопно постоянному. Поэтому, из теоремы 1 вытекает следующее обобщение теоремы Борсука–Улама:

Следствие 1. *Пусть X — $(n-1)$-связное пространство с инволюцией φ. Для всякого непрерывного отображения $f : X \to \mathbf{R}^n$ найдется такая точка $x_0 \in X$, что $f(x_0) = f(\varphi(x_0))$.*

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть X — $(n-1)$-связное метрическое пространство с инволюцией φ, а $\{F_1, F_2, \dots, F_{n+1}\}$ — покрытие пространства X, состоящее из замкнутых множеств.

Обозначим метрику пространства X через ρ и для произвольных $x \in X$, $A \subset X$, положим $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, a) \mid a \in A\}$. Для любого фиксированного A функция $\rho(x, A)$ — непрерывна. Если множество A замкнуто и $\rho(x, A) = 0$, тогда $x \in A$.

Определим функцию $g : X \to \mathbf{R}^{n+1}$ как следует:

$$g(x) = \big(\rho(x, F_1),\ \rho(x, F_2), \dots, \rho(x, F_{n+1})\big).$$

Функция g — непрерывна. Так как $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} F_i$, то для любого x найдется такое i, что $x \in F_i$ и следовательно $\rho(x, F_i) = 0$. Таким образом

$$g(X) \subset Y = \bigcup_{i=1}^{n+1} \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i = 0;\ x_j \geqq 0,\ \text{ если } j \neq i\}.$$

Легко сообразить, что пространство Y гомеоморфно пространству $\mathbf{R}^n$; через $h : Y \to \mathbf{R}^n$ обозначим гомеоморфизм Y на $\mathbf{R}^n$ и положим $f = hg$. Применив к отображению $f : X \to \mathbf{R}^n$ следствие 1, можно сделать заключение, что существует точка $x_0 \in X$, для которой $f(x_0) = f(\varphi(x_0))$, т. е. $h(g(x_0)) = h(g(\varphi(x_0)))$, значит $g(x_0) = g(\varphi(x_0))$. Последнее равенство означает, что

$$\rho(x_0, F_i) = \rho(\varphi(x_0), F_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Для некоторого i имеем $x_0 \in F_i$, следовательно $0 = \rho(x_0, F_{n+1}) = \rho(\varphi(x_0), F_{n+1})$. Это показывает, что $\varphi(x_0) \in F_i$.

Таким образом множество F_i содержит пару $\{x_0, \varphi(x_0)\}$.

Теорема 2 доказана. При $X = S^n$, доказанная теорема совпадает с теоремой Янга–Яворовского.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Лемма 2. *Если континуум X стягиваем относительно S^1, $\psi : X \to X$ — непрерывное отображение пространства X на X, а $\varphi : X \to X$ — непрерывное отображение пространства X в X и, наконец, $f : X \to S^1$ — непрерывное отображение пространства X в окружность S^1, тогда существует такая точка $x_0 \in X$, что $f(\varphi(x_0)) = f(\psi(x_0))$.*

Доказательство. То, что X стягиваемо относительно S^1, означает, что любое непрерывное отображение пространства X в S^1 гомотопно постоянному. Следовательно, отображение $f : X \to S^1$ гомотопно постоянному и, поэтому существует такое непрерывное отображение $\hat{f} : X \to \mathbf{R}$, что $f = e^{i\hat{f}}$ * (см. напр. [7], с. 209). Согласно простому утверждению из [8], стр. 222, существует точка $x_0 \in X$, для которой $\hat{f}(\varphi(x_0)) = \hat{f}(\psi(x_0))$. Тогда и $f(\varphi(x_0)) = f(\psi(x_0))$.

Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы 3.

Пусть X — метрический континуум с метрикой ρ, который стягиваем относительно окружности S^1, а $\psi : X \xrightarrow{\text{на}} X$ и $\varphi : X \to X$ — непрерывные отображения. Возмем покрытие пространства X тремя замкнутыми множествами F_1, F_2 и F_3 и докажем, что хотя бы одно из них содержит пару точек $\{\psi(x_0), \varphi(x_0)\}$.

Утверждение очевидно верно в случае, когда $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \neq \varnothing$. Действительно, ψ является отображением на X и, поэтому $\psi^{-1}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{3} F_i\right) \neq \varnothing$. Для любой точки x_0 из этого множества пара $\{\psi(x_0), \varphi(x_0)\}$ содержится в некотором из множеств F_i, потому что $\psi(x_0) \in \bigcap\limits_{i=1}^{3} F_i$, $\varphi(x_0) \in \bigcup\limits_{i=1}^{3} F_i$.

Итак, в дальнейшем можно предполагать, что $\bigcap\limits_{i=1}^{3} F_i = \varnothing$. Для любого x хотя бы одно из чисел $\rho(x, F_i)$, $i = 1, 2, 3$, отлично от 0 и следовательно $\sum\limits_{i=1}^{3} \rho(x, F_i) \neq 0$. Положим

$$\xi(x) = \frac{\rho(x, F_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} \rho(x, F_i)}, \quad \eta(x) = \frac{\rho(x, F_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3} \rho(x, F_i)}, \quad f(x) = (\xi(x), \eta(x)).$$

---

* Здесь i обозначает имагинерную единицу.

Отображение $f : X \to \mathbf{R}^2$ очевидно непрерывно. Так как $X = \bigcup_{i=1}^{3} F_i$, обязательно выполнено одно из трех равенств $\rho(x, F_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, и следовательно представляется хотя бы одна из следующих трех возможностей: $\xi(x) = 0$, $\eta(x) = 0$, $\xi(x) + \eta(x) = 1$. Это показывает, что $f(x)$ лежит на границе ∂T треугольника T с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Множество ∂T гомеоморфно S^1 и следовательно f — непрерывное отображение пространства X в окружность S^1.

Согласно лемме 2 существует точка $x_0 \in X$, для которой $f(\varphi(x_0)) = f(\psi(x_0))$, т. е.

$$\frac{\rho(\varphi(x_0), F_k)}{\sum_{i=1}^{3} \rho(\varphi(x_0), F_i)} = \frac{\rho(\psi(x_0), F_k)}{\sum_{i=1}^{3} \rho(\psi(x_0), F_i)}, \quad k = 1, 2.$$

Из этих двух равенств следует, что $\varphi(x_0) \in F_k$, $k = 1, 2$, тогда и только тогда, когда $\psi(x_0) \in F_k$. Если $\varphi(x_0) \notin F_1 \cup F_2$, тогда и $\psi(x_0) \notin F_1 \cup F_2$ и значит $\varphi(x_0)$ и $\psi(x_0)$ содержатся в F_3.

Теорема доказана.

Известно, что любое 1-связное и локально линейно связное пространство стягиваемо относительно S^1 (см. напр. [9], с. 138). Это дает возможность из теоремы 3 тривиальным образом вывести следующее

Следствие 2. *Если континуум X 1-связен и локально линейно связен, а $\psi : X \xrightarrow{\text{на}} X$ и $\varphi : X \to X$ — непрерывные отображения, тогда для любого покрытия пространства X тремя замкнутыми множествами хотя бы одно из них содержит $\psi(x_0)$ и $\varphi(x_0)$ для некоторой $x_0 \in X$.*

Сфера S^n — 1-связна, тогда и только тогда, когда $n \geqq 2$ и, к тому же, она локально линейно связна. Поэтому следствие 2 очевидным образом влечет следующее

Следствие 3. *Для любых непрерывных отображений $\psi : S^n \xrightarrow{\text{на}} S^n$ и $\varphi : S^n \to S^n$, $n \geqq 2$, и для любого покрытия сферы S^n тремя замкнутыми множествами хотя бы одно из них содержит $\psi(x_0)$ и $\varphi(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in S^n$.*

Очевидно, утверждение из следствия 3 не имеет место при $n = 1$. Если в следствии 3 положить $\psi = \mathrm{id}$, получаем

Следствие 4. *Пусть $\varphi : S^n \to S^n$, $n \geqq 2$, — произвольное непрерывное отображение, а $S^n = F_1 \cup F_2 \cup F_3$, где F_i — замкнутые множества. Тогда существует такая точка $x_0 \in S^n$, что x_0 и $\varphi(x_0)$ одновременно содержатся в некотором F_i.*

Очевидно следствие 4 является обобщением теоремы Шклярского, не только потому что $n \geqq 2$, но и так как φ не является обязательно гомеоморфизмом.

В заключение придадим несколько другую форму теореме 3. По определению, топологическое пространство X — уникогерентно, если оно связно и для каждой пары замкнутых связных множеств A и B, таких что

$X = A \cup B$, пересечение $A \cap B$ — связно. Метрический континуум стягиваем относительно S^1, тогда и только тогда, когда он уникогерентен (см. напр. [7], с. 209). Поэтому, теорему 3 можно высказать еще следующим образом:

Следствие 5. *Если компактное метрическое пространство X уникогерентно, а $\varphi : X \to X$ и $\psi : X \xrightarrow{\text{на}} X$ — непрерывные отображения, тогда для любого покрытия пространства X тремя замкнутыми множествами хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{\varphi(x_0), \psi(x_0)\}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Borsuk, K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. — Fund. Math., **20**, 1933, 177–190.
2. Щепин, Е. Одна теорема о склеивании антиподов. — ДАН СССР, **222**, 1975, № 4, 772–774.
3. Люстерник, Л., Л. Шнирельман. Топологические методы в вариационных задачах. М., 1930.
4. Yang, C. On the theorem of Borsuk–Ulam, Kakutani–Yamabe–Yujobo and Dyson, I. — Ann. Math., Ser. 2, **60**, 1954, № 2, 262–282.
5. Jaworowski, J. On antipodal sets on the sphere and on continuous involutions. — Fund. Math., **43**, 1956, 241–257.
6. Шклярский, Д. О разбиениях двумерной сферы. — Матем. сб., **16**, 1945, 125–128.
7. Čech, E. Point sets. Czech. Acad. Sci., Prague, 1969.
8. Хаджииванов, Н. Непрекъснати изображения на кабърчета в евклидови пространства. Математика и матем. образование. С., 1974, 221–230.
9. Спеньер, Э. Алгебраическая топология. М., 1971.

Поступила 18.05.1991