ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 85, 1991

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 85, 1991

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ХОПФА

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ

Николай Хаджииванов. ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ХОПФА

Доказано, что для любого непрерывного отображения $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ n-мерной сферы $S^n = \{x \mid x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| \leqq 1\}$ в n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и для любого δ, $0 < \delta < 2$, найдется пара точек x, y, для которых $\|x-y\| = \delta$ и $f(x) = f(y)$. С помощью этого предложения приводится доказательство теоремы Хопфа, согласно которой для любого покрытия сферы S^n $n+1$ замкнутыми подмножествами хотя бы одно из них содержит пару точек на расстоянии δ.

Nikolay Khadzhiivanov. ON A THEOREM OF HOPF

It is proved that for every continuous mapping $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ and δ, $0 < \delta < 2$, there exists a paire of points x, y with $\|x-y\| = \delta$ and $f(x) = f(y)$. The well-known theorem of Hopf is deduced from the above proposition: for every closed cover $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ of the n-sphere S^n and for every δ, $0 < \delta < 2$, there exists a triple x, y, F_i such that $\|x-y\| = \delta$ and $x, y \in F_i$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во избежания недоразумений начнем с нескольких обозначений. Через $\mathbb{R}^{n+1}$ обозначаем $(n+1)$-мерное евклидово пространство, через $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ — единичная n-мерная сфера, а $D^n = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqq 1\}$ — единичный n-мерный шар в координатной плоскости $x_{n+1} = 0$. Отрезок в $\mathbb{R}^{n+1}$, соединяющий начало $\mathcal{O}$ с точкой $\mathcal{K} = (0, \dots, 0, 1)$, обозначим через T, а множество $\Gamma^n = D^n \cup T$ назовем *n-мерной кнопкой.*

Согласно классической теореме Борсука–Улама, *для всякого непре-*

рывного отображения $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in S^n$, для которой $f(x) = f(-x)$.

В [1, 2] нами доказана следующая теорема о кнопке:

Если $f : \Gamma^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение n-мерной кнопки в $\mathbb{R}^n$, то в Γ^n существует пара точек x, y, удовлетворяющая условиям $f(x) = f(y)$, $\|x - y\| = 1$ и дополнительному условию — если x и y принадлежат D^n, тогда отрезок $[x, y]$ содержит начало $\mathcal{O}$.

При помощи теоремы о кнопке докажем следующее усиление теоремы Борсука–Улама:

Теорема 1. *Пусть $0 < \delta \leqq 2$ и $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Тогда существует точки $x, y \in S^n$, для которых $f(x) = f(y)$ и $\|x - y\| = \delta$.*

Напомним теорему Люстерника–Шнирельмана–Борсука, согласно которой, для любого покрытия S^n с помощью $n + 1$ замкнутых множеств найдется такое из них, которое содержит пару диаметрально противоположных точек.

Хопф усилил эту теорему следующим образом:

Теорема 2. *Если $0 < \delta \leqq 2$ и сфера S^n покрыта обьединением $n+1$ замкнутых множеств, тогда хотя бы одно из них содержит пару точек x, y, расстояние между которыми равняется δ.*

Библиографию по затронутым вопросам читатель может найти в монографии Грюнбаума [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Сначала докажем одно вспомагательное утверждение:

Лемма 1. *Для любого δ, $0 < \delta \leqq 2$, и для любой точки $\Omega \in S^n$ существует непрерывное отображение $\varphi : D^n \to S^n$, такое что $\varphi(\mathcal{O}) = \Omega$ и, кроме того, удовлетворяет следующему требованию: если отрезок $[u, v]$ $(u, v \in D^n)$ содержит начало $\mathcal{O}$ и $\|u - v\| = 1$, тогда $\|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \delta$.*

Доказательство. Построим сначала искомое отображение φ в частном случае, когда $\Omega = \mathcal{K}$. По существу этим доказательство завершается — достаточно взять суперпозицию полученного отображения и изометрии сферы на себя, при которой $\mathcal{K}$ переходит в Ω.

Положим $\alpha = 2 \arcsin \dfrac{\delta}{2}$. Определим искомое отображение φ следующим образом: если $u = (u_1, \ldots, u_n, 0)$, тогда

$$\varphi(u) = \left(\frac{\sin \alpha \|u\|}{\|u\|} u_1, \ldots, \frac{\sin \alpha \|u\|}{\|u\|} u_n, \cos \alpha \|u\| \right).$$

Ясно, что $\|\varphi(u)\| = 1$, $\varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{K}$ и $\varphi : D^n \to S^n$ — непрерывное отображение. Пусть теперь отрезок $[u, v]$ $(u, v \in D^n)$ содержит $\mathcal{O}$. Тогда

$\frac{v}{||v||} = -\frac{u}{||u||}$. Из дополнительного предположения $||u - v|| = 1$ следует, что $||u|| + ||v|| = 1$. Тогда

$$-\varphi(v) = \left(\frac{\sin\alpha||v||}{||u||}u_1, \ldots, \frac{\sin\alpha||v||}{||u||}u_n, -\cos\alpha||v||\right)$$

и таким образом

$$||\varphi(u) - \varphi(v)|| = \sqrt{(\sin\alpha||u|| + \sin\alpha||v||)^2 + (\cos\alpha||u|| - \cos\alpha||v||)^2}$$
$$= \sqrt{2(1 - \cos\alpha)} = 2\sin\frac{\alpha}{2} = \delta.$$

Лемма доказана.

А теперь перейдем к доказательству самой теоремы.

Пусть $0 < \delta \leqq 2$ и $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Надо доказать, что существуют точки $x, y \in S^n$, для которых $f(x) = f(y)$ и $||x - y|| = \delta$.

Пусть Ω' — одна из самых удаленных от начала точек на множестве $f(S^n)$ и Ω — такая точка из S^n, для которой $f(\Omega) = \Omega'$.

Через T' обозначим некоторый отрезок с началом Ω', который имеет единственную общую точку с $f(S^n)$ — можно взять этот отрезок на луче $\overline{\mathcal{O}\Omega'}$, которой, согласно определению точки Ω', не содержит точек из $f(S^n)$ вне отрезка $[\mathcal{O}, \Omega']$. Пусть $h : T \to T'$ — гомеоморфизм и $h(\mathcal{O}) = \Omega'$.

Согласно лемме, имеется непрерывное отображение $\varphi : D^n \to S^n$, для которого $\varphi(\mathcal{O}) = \Omega$ и, кроме того, если $u \in D^n$, $v \in D^n$, $\mathcal{O} \in [u, v]$, $||u - v|| = 1$, тогда $||\varphi(u) - \varphi(v)|| = \delta$.

Построим отображение $\mathcal{F} : \Gamma^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} h(u), & \text{если } u \in T; \\ f(\varphi(u)), & \text{если } u \in D^n. \end{cases}$$

Отображение $\mathcal{F}$ определено корректно, потому что $h(\mathcal{O}) = \Omega' = f(\Omega) = f(\varphi(\mathcal{O}))$. Очевидно это отображение непрерывно.

Определенное отображение $\mathcal{F}$ имеет и следующее свойство:

$$\text{если } \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v) \text{ и } u \neq v, \text{ тогда } u \in D^n \text{ и } v \in D^n.$$

Действительно, допустим, что например $v \notin D^n$. Если и $u \notin D^n$, тогда $\mathcal{F}(u) = h(u)$, $\mathcal{F}(v) = h(v)$ и так как h — гомеоморфизм, то $h(u) \neq h(v)$, что является противоречием. Если $u \in D^n$, тогда $\varphi(u) \in S^n$ и следовательно $\mathcal{F}(u) = f(\varphi(u)) \in f(S^n)$, а с другой стороны $\mathcal{F}(v) = h(v) \in T'$, так что $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v) \in f(S^n) \cap T'$. Но пересечение $f(S^n) \cap T'$ состоит из единственной точки Ω' и следовательно $h(v) = \Omega'$, что является противоречием, потому что $\Omega' = h(\mathcal{O})$, а $v \neq \mathcal{O}$.

Дополнительное свойство отображения $\mathcal{F}$ доказано.

Согласно теореме о кнопке, непрерывное отображение $\mathcal{F} : \Gamma^n \to \mathbb{R}^n$ склеивает некоторую пару точек u, v кнопки Γ^n на расстоянии 1, удовлетворяющие к тому же следующее: если $u \in D^n$ и $v \in D^n$, тогда отрезок

$[u, v]$ содержит начало $\mathbb{O}$. В нашем случае последнее выполнено, потому что, как мы только-что доказали, из $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)$ и $u \neq v$ следует $u \in D^n$, $v \in D^n$.

Положим $x = \varphi(u)$, $y = \varphi(v)$. Равенство $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)$ и включения $u \in D^n$, $v \in D^n$ дают (см. определение отображения $\mathcal{F}$) $x \in S^n$, $y \in S^n$, $f(x) = f(y)$. Кроме того, согласно лемме, $\|x - y\| = \delta$.

Теорема доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОГО ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 2

Будем говорить, что *метрическое пространство* $\langle X, \rho\rangle$ *имеет тип* $(S^n \to \mathbb{R}^n)$, если для любого δ, $0 < \delta \leqq \operatorname{diam} X$, и для любого непрерывного отображения $f : X \to \mathbb{R}^n$ существует хотя бы одна пара точек x, y, для которых $\rho(x, y) = \delta$ и $f(x) = f(y)$. Очевидно n-мерная сфера S^n имеет тип $(S^n \to \mathbb{R}^n)$ (см. теорему 1).

Теорема 2 является тривиальным следствием из следующего более общего утверждения:

Теорема 3. *Пусть метрическое пространство* $\langle X, \rho\rangle$ *имеет тип* $(S^n \to \mathbb{R}^n)$ *и* δ *удовлетворяет неравенствам* $0 < \delta \leqq \operatorname{diam} X$. *Тогда для любого покрытия пространства* X *замкнутыми множествами* F_1, F_2, $\ldots$, F_{n+1} *найдется такая пара точек* x, y *которые содержатся в одних и тех же* F_i.

Доказательство. Через $\mathbb{R}^{n+1}_{+i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, обозначим множество всех точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, для которых $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, $\ldots$, $x_{n+1} \geqq 0$ и $x_i = 0$. Легко сообразить, что подпространство $P = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{R}^{n+1}_{+i}$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$. Определим непрерывное отображение $f : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ следующим образом:

$$f(x) = \big(\rho(x, F_1), \rho(x, F_2), \ldots, \rho(x, F_{n+1})\big).$$

Для любого x имеется i с $\rho(x, F_i) = 0$, так что $f(x) \in P$. Следовательно f является непрерывным отображением пространства X в пространство $\mathbb{R}^n$ и так как X имеет тип $(S^n \to \mathbb{R}^n)$, то существует пара точек x, y из X, для которых $\rho(x, y) = \delta$ и $f(x) = f(y)$. Последнее равенство означает, что

$$\rho(x, F_1) = \rho(y, F_1),\ \rho(x, F_2) = \rho(y, F_2),\ \ldots,\ \rho(x, F_{n+1}) = \rho(y, F_{n+1}).$$

Таким образом $\rho(x, F_i) = 0$ тогда и только тогда, когда $\rho(y, F_i) = 0$. Множество F_i — замкнуто и поэтому равенство $\rho(x, F_i) = 0$ эквивалентно включению $x \in F_i$.

Окончательно, существуют точки x и y из X, для которых $\rho(x, y) = \delta$ и $x \in F_i \iff y \in F_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаджииванов, Н. Непрекъснати изображения на кабърчета в евклидови пространства. — II-ра пролетна конф. на БМД, Видин, 6–8 април 1973. София, БАН, 1974, 221–230.
2. Хаджииванов, Н. Непрерывные отображения кнопок в $\mathbb{R}^n$. Бюллетень Польской академии наук, Серия мат., астр. и физ. наук, т. XXII, № 3, 1974, 283–287.
3. Грюнбаум, Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. Москва, 1971.

Поступила 10.02.1992