ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 86, 1992

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 86, 1992

О (3,4)-КРАТНОСТЯХ РАМСЕЯ

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ, ИВАН ПАШОВ

Николай Хаджииванов, Иван Пашов. О (3,4)-КРАТНОСТЯХ РАМСЕЯ

Через $M_n(3,4)$ обозначена минимальная сумма чисел 3-клик и 4-антиклик для n-вершинного графа. Доказано, что $M_n(3,4) \sim m(3,4)\binom{n}{3}$, где $\frac{1}{30} \leqq m(3,4) \leqq \frac{1}{9}$.

Nikolay Khadzhiivanov, Ivan Pashov. ON THE RAMSEY (3,4)-MULTIPLICITY

Let $M_n(3,4)$ be the minimal sum of the 3-clique's and 4-anticlique's numbers in an arbitrary n-vertex graph. The asymptotic formula $M_n(3,4) \sim m(3,4)\binom{n}{3}$ with $\frac{1}{30} \leqq m(3,4) \leqq \frac{1}{9}$ is proved.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются только обыкновенные графы. Множество, состоящее из p вершин графа, называется p-кликой (соотв. p-антикликой), если любые две из этих вершин смежны (соотв. несмежны). Через $c_p(G)$ и $a_q(G)$ будем обозначать соответственно число p-клик и число q-антиклик графа G. Сумма $c_p(G) + a_q(G)$ называется (p,q)-кратностью Рамсея графа G и обозначается через $M(G;p,q)$. Если зафиксировать n, p и q, минимум $M(G;p,q)$ по всевозможным n-вершинным графам G обозначается через $M_n(p,q)$. Легко сообразить, что $M_n(p,q) = M_n(q,p)$, так как $M(G;p,q) = M(\overline{G};q,p)$, где $\overline{G}$ — дополнительный граф графа G. Очевидно $M_n(2,2) = \binom{n}{2}$. Гудман [1] определил $M_n(3,3)$. Другие значения $M_n(p,q)$ при $p \geqq 2$,

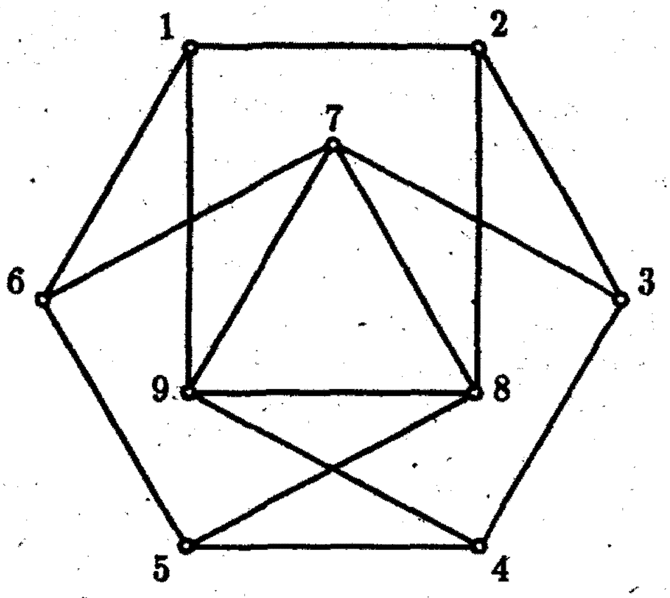

Рис. 1

$q \geqq 2$ пока неизвестны.

Грийнвуд и Глиссон [2] установили, что $M_n(3,4) > 0$ только тогда, когда $n \geqq 9$. Н. Ненов и Н. Хаджииванов [3, 4] доказали, что $M_9(3,4) = 1$ и установили, что имеются только два графа (см. графы G_1 и G_2 на рис. 1 и 2), для которых $M(G;3,4) = 1$. Они же доказали [5], что если 10-вершинный граф G не имеет 3-клик, тогда $M(G;3,4) \geqq 5$, а совместно с Ив. Пашовым [6] — что если 10-вершинный граф G не имеет 4-антиклик, тогда $M(G;3,4) \geqq 4$.

В настоящей заметке докажем, что $M_{10}(3,4) = 4$ и

$$M_n(3,4) \sim m(3,4)\binom{n}{3}, \quad \text{где } \frac{1}{30} \leqq m(3,4) \leqq \frac{1}{9}.$$

2. ЕСЛИ В G ИМЕЕТСЯ 3-КЛИКА И 4-АНТИКЛИКА БЕЗ ОБЩИХ ВЕРШИН, ТОГДА $M(G;3,4) \geqq 4$

Пусть G — граф, в котором имеются 3-клика t и 4-антиклика q и $t \cap q = \varnothing$. Докажем, что $M(G;3,4) \geqq 4$.

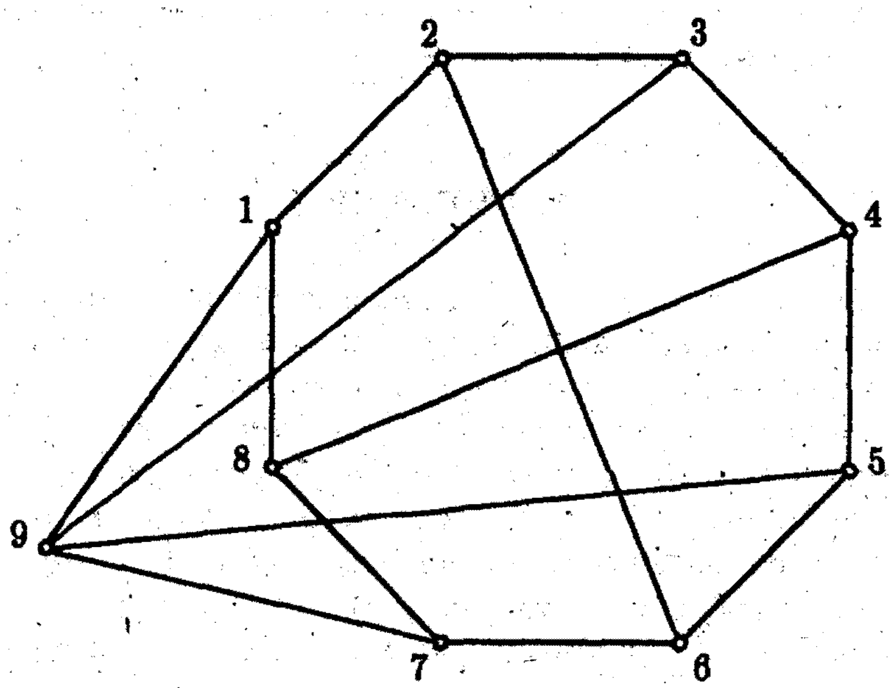

Рис. 2

Неравенство выполняется, если некоторая вершина из q смежна всем трем вершинам из t, потому что тогда $c_3(G) \geqq 4$.

Неравенство имеет место и если существуют такие две вершины из q, любая из которых смежна двум вершинам из t. В этом случае $c_3(G) \geqq 3$ и следовательно $M(G;3,4) \geqq 4$.

Неравенство выполнено и если в q имеется одна вершина u, которая смежна ровно двум вершинам из t, а любая из остальных трех вершин из q смежна не более одной вершине из t. В этом случае число промежуточных ребер, соединяющих q с t, не более чем 5 и поэтому существует вершина v из t, из которой выходит самое более одно промежуточное ребро. Сейчас u является вершиной 3-клики, отличной от t, а v — вершиной 4-антиклики, отличной от q. Это показывает, что $c_3(G) \geqq 2$ и $a_4(G) \geqq 2$, так что $M(G;3,4) \geqq 4$.

Если в t имеется вершина, которая не смежна ни одной вершине из q, тогда она является вершиной 5-антиклики, так что $a_4(G) \geqq 5$ и неравенство снова выполнено.

Чтобы окончательно доказать искомое неравенство, осталось рассмотреть случай, когда любая вершина из t смежна некоторой вершине из q и одновременно любая вершина из q смежна не более одной вершине из t. Теперь число промежуточных ребер не больше 4 и имеются такие две вершины из t, любая из которых имеет ровно одну смежную в q. Упомянутые две вершины являются вершинами двух 4-антиклик, отличных от q и между собой. Следовательно $a_4(G) \geqq 3$ и $M(G;3,4) \geqq 4$.

Доказательство неравенства завершено.

3. $M_{10}(3, 4) \geqq 4$

Надо доказать, что если G — 10-вершинный граф, тогда $M(G;3,4) \geqq 4$. Это утверждение верно, если в G нет 3-клик или 4-антиклик (см. п. 1). Оно верно и тогда, когда в G можно найти 3-клику и 4-антиклику без общих вершин (см. п. 2). Поэтому в дальнейшем будем считать, что в G имеется хотя бы одна 3-клика и хотя бы одна 4-антиклика и притом всякая 3-клика имеет общую вершину с произвольной 4-антикликой.

Через t обозначим некоторую 3-клику, через q — 4-антиклику, а через v — их общую вершину. Рассмотрим 9-вершинный граф $G - v$, который получается из G удалением вершины v и, разумеется, всех ребер, инцидентных с v. Если $M(G - v;3,4) \geqq 2$, тогда очевидно $M(G;3,4) \geqq 4$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $M(G - v;3,4) \leqq 1$. Так как $G - v$ — 9-вершинный граф, то $M(G - v;3,4) = 1$ (см. п. 1).

Искомое неравенство верно очевидно и если v является вершиной некоторой 3-клики, отличной от t, или некоторой 4-антиклики, отличной от q. Поэтому будем считать, что это не так.

Возникают две возможности $G - v = G_1$ или $G - v = G_2$ (см. п. 1), каждую из которых исследуем в отдельности.

I. $G - v = G_1$

Множество $q \setminus v$ является 3-антикликой в G_1. 4-антиклика q должна пересекать 3-клику $[7, 8, 9]$; без ограничения общности можно считать, что их общая вершина 7. Остальные две вершины множества $q \setminus v$ находятся в множествах $\{1, 2\}$ и $\{4, 5\}$. Из-за симметрии достаточно рассмотреть только два случая: $q \setminus v = \{7, 1, 5\}$ или $q \setminus v = \{7, 1, 4\}$.

Пусть $q \setminus v = \{7, 1, 5\}$, т. е. $q = \{v, 7, 1, 5\}$. Вершина v смежна вершине 2, иначе $\{v, 7, 5, 2\}$ будет вторая 4-антиклика, содержащая v. Вершина v смежна вершине 3, иначе $\{v, 1, 5, 3\}$ будет вторая 4-антиклика, содержащая v. Вершина v смежна и вершине 4, иначе $\{v, 1, 7, 4\}$ будет вторая 4-антиклика, содержащая v. Тогда $[v, 2, 3]$ и $[v, 3, 4]$ будут две 3-клики, содержащие вершину v, что является противоречием.

Пусть теперь $q \setminus v = \{7, 1, 4\}$, т. е. $q = \{v, 7, 1, 4\}$. Сейчас v смежна вершине 2, иначе $\{v, 7, 4, 2\}$ будет вторая 4-антиклика, содержащая v. Вершина v смежна вершине 8, иначе $\{v, 1, 4, 8\}$ будет вторая 4-антиклика, содержащая v. Наконец, вершина v смежна вершине 5, иначе $\{v, 1, 7, 5\}$ будет вторая 4-антиклика, содержащая v. Таким образом $[v, 2, 8]$ и $[v, 8, 5]$ — 3-клики, содержащие v, что является противоречием.

Таким образом доказано, что первая возможность на самом деле не представляется.

II. $G - v = G_2$

Пусть $t = [v, a, b]$, где $[a, b]$ — ребро графа G_2. Из-за симметрии этого графа имеет место один из следующих трех случаев:

1) $[a, b] = [9, 1]$.

Теперь вершина v несмежна вершинам 2, 8, 5, 7, так как иначе будем иметь вторую 3-клику, содержащую v. Тогда $\{v, 2, 5, 8\}$ и $\{v, 2, 5, 7\}$ — две 4-антиклики, содержащие v, что является противоречием.

2) $[a, b] = [1, 2]$.

Вершина v не смежна вершинам 8, 3, 9, 6 и следовательно $\{v, 8, 6, 9\}$, $\{v, 8, 6, 3\}$ — 4-антиклики, содержащие v — противоречие.

3) $[a, b] = [2, 6]$.

Сейчас v не смежна вершинам 1, 3, 5, 7 и следовательно $\{v, 1, 3, 5, 7\}$ — 5-антиклика, так что v содержится не только в одной 4-антиклике — противоречие.

Таким образом доказано, что и вторая возможность на самом деле не представляется.

Окончательно, неравенство $M(G; 3, 4) \geq 4$ доказано.

4. ПРИМЕР 10-ВЕРШИННОГО ГРАФА G, $c_3(G) = a_4(G) = 2$

На рис. 3 изображен 8-вершинный граф без 3-клик и 4-антиклик. Присоединяя к нему новую вершину a, объявляя ее смежной вершинам 1, 3 и 5, получим 9-вершинный граф с одной 3-кликой и одной 4-антикликой (рис. 4). Присоединяя к последнему графу новую вершину b, объявляя ее смежной вершинам 2, 4 и 6, получим 10-вершинный граф G, изображенный на рис. 5, для которого $c_3(G) = 2$ и $a_4(G) = 2$, так что $M(G; 3, 4) = 4$.

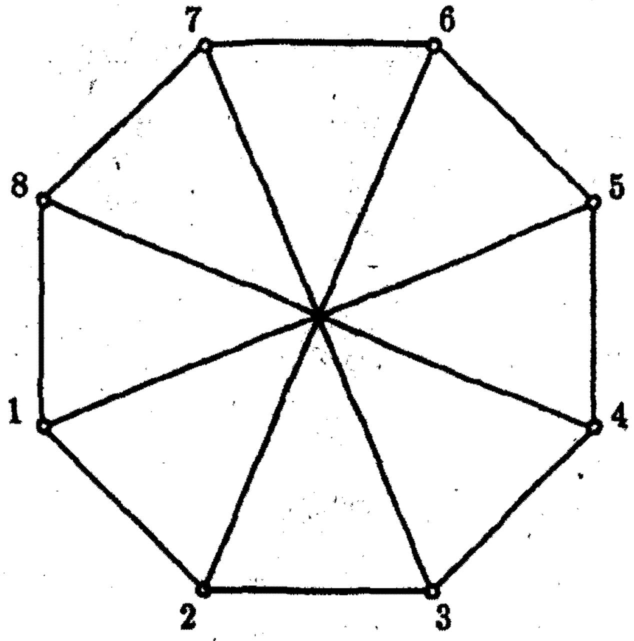

Рис. 3

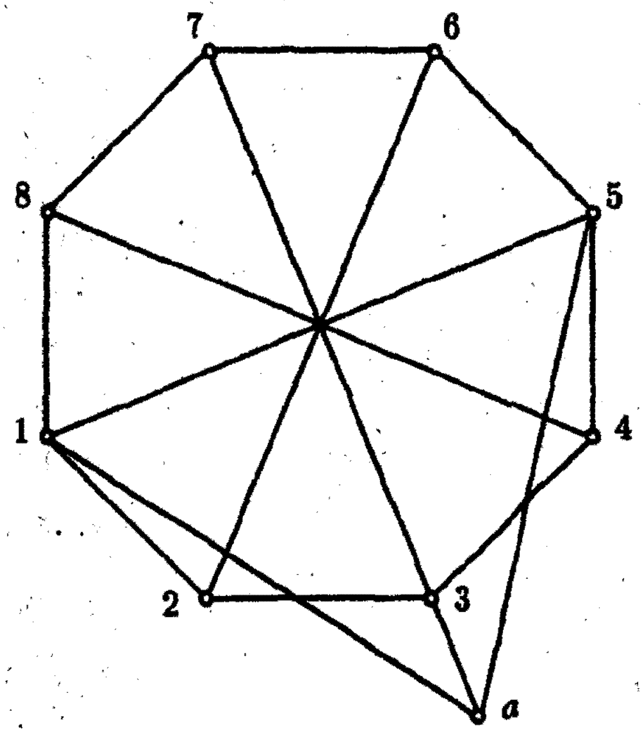

Рис. 4

С помощью этого примера и утверждения, доказанного в п. 3, нами получена следующая:

Теорема 1. $M_{10}(3, 4) = 4$.

5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ $M_n(3,4)/\binom{n}{3}$ НЕ УБЫВАЕТ

Это утверждение очевидно эквивалентно следующему неравенству:

(1) $(n-3)M_n(3,4) \geqq nM_{n-1}(3,4)$.

Пусть G — n-вершинный граф. Легко сообразить, что:

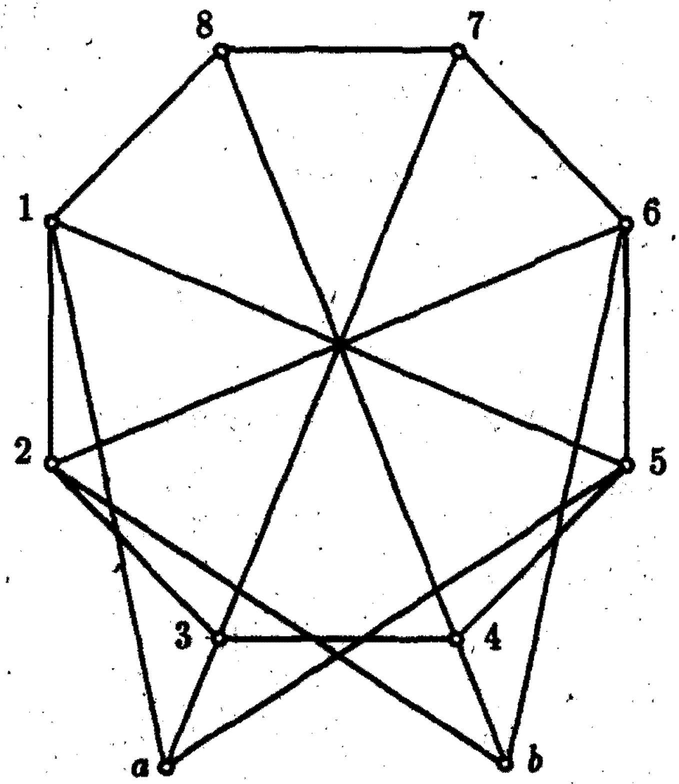

Рис. 5

$$\sum_v c_3(G-v) = (n-3)c_3(G), \tag{2}$$

$$\sum_v a_4(G-v) = (n-4)a_4(G). \tag{3}$$

Почленным суммированием, получаем

$$\sum_v M(G-v;3,4) = (n-3)c_3(G) + (n-4)a_4(G) \leqq (n-3)M(G;3,4). \tag{4}$$

Так как $G-v$ — $(n-1)$-вершинный граф, то

$$M_{n-1}(3,4) \leqq M(G-v;3,4). \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекает

$$nM_{n-1}(3,4) \leqq (n-3)M(G;3,4). \tag{6}$$

Неравенство (6), которое можно переписать следующим образом:

$$M(G;3,4) \geqq \frac{n}{n-3} M_{n-1}(3,4),$$

имеет место для любого n-вершинного графа G и поэтому

$$M_n(3,4) \geqq \frac{n}{n-3} M_{n-1}(3,4),$$

что и требовалось доказать.

Из (1) следует, что

$$\frac{M_n(3,4)}{\binom{n}{3}} \geqq \frac{M_{10}(3,4)}{\binom{10}{3}}, \quad n \geqq 10,$$

и так как $M_{10}(3,4) = 4$, получаем

Теорема 2. *$M_n(3,4) \geqq \frac{1}{30}\binom{n}{3}$ при $n \geqq 10$.*

6. ОЦЕНКА СВЕРХУ ДЛЯ $M_n(3,4)$

При фиксированном n сумма $\binom{n_1}{3} + \binom{n_2}{3} + \binom{n_3}{3}$, где натуральные числа n_i подчинены условию $n_1 + n_2 + n_3 = n$, принимает свое наименьшее значение $h(n)$ точно тогда, когда n_i почти равны, т. е. $|n_i - n_j| \leqq 1$. Очевидно

$$h(n) = \begin{cases} 3\binom{n/3}{3}, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 3; \\ 2\binom{(n-1)/3}{3} + \binom{(n+2)/3}{3}, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 3; \\ 2\binom{(n+1)/3}{3} + \binom{(n-2)/3}{3}, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

т. е.

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{n(n-3)(n-6)}{54}, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 3; \\ \dfrac{(n-1)(n-4)^2}{54}, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 3; \\ \dfrac{(n-2)^2(n-5)}{54}, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

Рассмотрим теперь n-вершинный граф G_n, который является объединением трех дизъюнктных полных графов с почти равным количеством элементов. Очевидно $a_4(G_n) = 0$ и $c_3(G_n) = h(n)$, так что $M(G_n; 3, 4) = h(n)$. Таким образом нами доказано следующее предложение:

Теорема 3. $M_n(3,4) \leqq h(n)$.

7. АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ $M_n(3,4)$

Из теорем 2 и 3 следует, что

$$\frac{1}{30} \leqq \frac{M_n(3,4)}{\binom{n}{3}} \leqq \frac{h(n)}{\binom{n}{3}} \leqq \frac{1}{9} \quad \text{при } n \geqq 10.$$

Так как последовательность $\dfrac{M_n(3,4)}{\binom{n}{3}}$ — неубывающая и ограниченная, она сходится. Обозначим ее предел через $m(3,4)$. Доказана следующая

Теорема 4. $M_n(3,4) \sim m(3,4)\binom{n}{3}$, *где* $\dfrac{1}{30} \leqq m(3,4) \leqq \dfrac{1}{9}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goodman, A. On sets of acquaintances and strangers at any party. — Amer. Math. Monthly, 66, 1959, 778–783.
2. Greenwood, R., A. Gleason. Combinatorial relations and chromatic graphs. — Canad. Math. J., 7, I, 1955, 1–7.
3. Хаджииванов, Н., Н. Ненов. Усиление одной теоремы Грийнвуда и Глисcона о раскрасках ребер полного графа с 9 вершинами. — Доклады БАН, 31, №6, 1978, 631–633.
4. Ненов, Н., Н. Хаджииванов. О некоторых двуцветных раскрасках ребер полного графа с 9 вершинами. — Год. Соф. унив., 71, II, ФММ, 1976–1977, 95–115.
5. Ненов, Н., Н. Хаджииванов. Об одном экстремальном свойстве графа Петерсена. — Год. Соф. унив., ФММ, 75, I, 1981, 115–123.
6. Хаджииванов, Н., Н. Ненов, Ив. Пашов. О числе 3-клик некоторых графов без 4-антиклик. — Год. Висш. пед. инст. Шумен, VIII Б, Природо-мат. фак., 1984, 11–29.

Поступила 25.08.1993