

---

## ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ ЧИСЛА ВЕРШИН НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ РАМСЕЯ

НЕДЯЛКО НЕНОВ

*Недялко Ненов.* ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ ЧИСЛА ВЕРШИН НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ РАМСЕЯ

Для данного графа  $G$  символ  $V(G)$  обозначает множество его вершин. Граф  $G$  называется  $(p_1, \dots, p_s)$ -графом Рамсея, если в любой  $s$ -раскраске его ребер существует монохроматическая  $p_i$ -клика  $i$ -ого цвета для некоторого  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Символ  $R(p_1, \dots, p_s)$  обозначает минимальное натуральное число  $n$ , для которого полный граф с  $n$  вершинами является  $(p_1, \dots, p_s)$ -графом Рамсея, а символ  $N(R(p_1, \dots, p_s))$  — минимальное натуральное число  $n$ , для которого существует  $(p_1, \dots, p_s)$ -граф Рамсея с  $|V(G)| = n$  и не содержащий  $R(p_1, \dots, p_s)$ -клик. В настоящей работе доказываются нижние оценки для чисел  $N(R(p_1, \dots, p_s))$ .

*Nedjalko Nenov.* A LOWER BOUND FOR THE NUMBER OF VERTICES OF SOME RAMSEY GRAPHS

A subset  $v_1, \dots, v_p$  of vertices of graph is called a  $p$ -clique if any two of them are adjacent. The graph  $G$  is called a  $(p_1, \dots, p_s)$ -Ramsey graph, for some set of integers  $p_1, \dots, p_s$  if for every  $s$ -colouring of the edges of  $G$  there exists an  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , such that  $G$  contains a monochromatic  $p_i$ -clique of the  $i$ -colour. The symbol  $R(p_1, \dots, p_s)$  denotes the minimal natural number  $n$  such that the complete graph with  $n$  vertices is  $(p_1, \dots, p_s)$ -Ramsey graph and the symbol  $N(R(p_1, \dots, p_s))$  — the minimal natural number  $n$  such that there exists a  $(p_1, \dots, p_s)$ -Ramsey graph with  $n$  vertices and without  $R(p_1, \dots, p_s)$ -cliques. In this paper it is proved a lower bound for the numbers  $N(R(p_1, \dots, p_s))$ .

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ

Будем рассматривать конечные, неориентированные графы, без кратных ребер и петель, т. е. под графом всюду будем понимать упорядоченную пару  $G = (V(G), E(G))$ , где  $V(G)$  — конечное множество, а  $E(G)$  — некоторая совокупность 2-элементных подмножеств множества  $V(G)$ . Элементы  $V(G)$  называются вершинами графа  $G$ , а элементы  $E(G)$  — ребрами графа  $G$ . Если  $v_1, v_2 \in V(G)$  и  $[v_1, v_2] \in E(G)$  будем говорить, что вершины  $v_1$  и  $v_2$  смежные вершины графа  $G$ . Дополнение графа  $G$  обозначается  $\bar{G}$  и определяется следующим образом:  $V(\bar{G}) = V(G)$  и две вершины смежны в  $\bar{G}$  тогда и только тогда, когда они несмежны в  $G$ . Множество вершин  $v_1, v_2, \dots, v_p$  графа  $G$  называется  $p$ -кликой графа  $G$ , если любые две из них смежны. Наибольшее натуральное число  $p$ , для которого граф  $G$  имеет  $p$ -кликку, называется кликовым числом графа  $G$  и обозначается  $cl(G)$ . Множество вершин графа называется независимым множеством вершин, если любые две из них несмежны. Наибольшее натуральное число  $p$ , для которого граф  $G$  имеет  $p$ -вершинное независимое множество вершин, называется числом независимости графа  $G$  и обозначается  $\alpha(G)$ . Ясно, что  $\alpha(G) = cl(\bar{G})$ . Разложение  $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$  называется  $r$ -хроматическим разложением вершин графа  $G$ , если  $V_i, i = 1, \dots, r$  — независимые множества вершин графа  $G$  и  $V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j$ . Наименьшее натуральное число  $r$ , для которого граф  $G$  обладает  $r$ -хроматическим разложением, называется хроматическим числом графа  $G$  и обозначается  $\chi(G)$ .

Граф  $G_1$  называется подграфом графа  $G$ , если  $V(G_1) \subseteq V(G)$  и  $E(G_1) \subseteq E(G)$ . Пусть  $M \subseteq V(G)$ . Тогда через  $\langle M \rangle$  будем обозначать подграф графа  $G$ , порожденный множеством вершин  $M$ , т. е.  $V(\langle M \rangle) = M$ , и две вершины множества  $M$  смежны в  $\langle M \rangle$  тогда и только тогда, когда они смежны в  $G$ . Если  $v \in V(G)$ , то через  $G - v$  будем обозначать подграф, получающийся из  $G$  после удаления вершины  $v$ , т. е.  $G - v = (V(G) - v)$ . Если  $M \subseteq V(G)$ , то через  $Ad(M)$  будем обозначать множество всех вершин графа  $G$ , которые смежны всем вершинам множества  $M$ . Если  $|V(G)| = n$  и любые две вершины графа  $G$  смежны, тогда этот граф называется полным графом с  $n$  вершинами и обозначается  $K_n$ . Упорядоченное множество вершин  $v_1, v_2, \dots, v_n$  данного графа  $G$  называется простым циклом длины  $n$  графа  $G$ , если  $[v_1, v_2], [v_2, v_3], \dots, [v_{n-1}, v_n], [v_n, v_1] \in E(G)$  и обозначается  $C_n$ .

Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — два графа без общих вершин. Через  $G_1 + G_2$  обозначается граф  $G$ , для которого  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  и  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$ , где  $E' = \{[v_1, v_2] \mid v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)\}$ .

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФОВ РАМСЕЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

**Определение.** Любое разложение  $E(G) = E_1 \cup \dots \cup E_s$ ,  $E_i \cap E_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , называется  $s$ -раскраской ребер графа  $G$ .

**Определение.** Будем говорить, что  $p$ -клика  $P$  графа  $G$  является монокроматической  $p$ -кликкой  $i$ -ого цвета  $s$ -раскраски  $E(G) = E_1 \cup \dots \cup E_s$  его ребер, если  $E(P) \subseteq E_i$ .

**Определение:** Пусть  $p_1, \dots, p_s$  — натуральные числа,  $p_i \geq 2$ . Граф  $G$  называется  $(p_1, \dots, p_s)$ -графом Рамсея, если в любой  $s$ -раскраске его ребер существует монокроматическая  $p_i$ -клика  $i$ -ого цвета для некоторого  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ .

**Определение.** Наименьшее натуральное число  $n$ , для которого полный граф с  $n$  вершинами  $K_n$  является  $(p_1, \dots, p_s)$ -графом Рамсея, называется числом Рамсея и обозначается  $R(p_1, \dots, p_s)$ .

Существование чисел  $R(p_1, \dots, p_s)$  впервые было доказано Рамсеем в [4]. Очевидно  $R(p_1, \dots, p_s)$  — симметрическая функция,  $R(p) = p$  и  $R(p_1, \dots, p_s, 2) = R(p_1, \dots, p_s)$ . Поэтому будем рассматривать только такие числа Рамсея  $R(p_1, \dots, p_s)$ , для которых  $s \geq 2$  и  $p_i \geq 3$ . Известны только следующие нетривиальные числа Рамсея:  $R(3, 3) = 6$ ,  $R(3, 4) = R(4, 3) = 9$ ,  $R(3, 5) = R(5, 3) = 14$ ,  $R(3, 6) = R(6, 3) = 18$ ,  $R(3, 7) = R(7, 3) = 23$ ,  $R(3, 9) = R(9, 3) = 36$ ,  $R(4, 4) = 18$ ,  $R(3, 3, 3) = 18$ . По поводу чисел Рамсея см. [7]. Очевидно, что если  $cl(G) \geq R(p_1, \dots, p_s)$ , тогда граф  $G$  является  $(p_1, \dots, p_s)$ -графом Рамсея.

**Определение.** Пусть  $p_1, \dots, p_s$  — натуральные числа. Наименьшее натуральное число  $n$ , для которого существует  $(p_1, \dots, p_s)$ -граф Рамсея  $G$  с  $n$  вершинами и  $cl(G) < R(p_1, \dots, p_s)$ , обозначается  $N(R(p_1, \dots, p_s))$ .

Числа  $N(R(p_1, \dots, p_s))$  существуют, см. [5]. В [6] доказано, что  $N(R(3, 3)) = 8$ ,  $N(R(3, 5)) = 17$  и  $N(R(4, 4)) = 20$ . Тоже в [6] доказано неравенство

$$N(R(p_1, \dots, p_s)) \geq R(p_1, \dots, p_s) + 2.$$

Это неравенство точное, так что без дополнительных условий усилить его нельзя. В [3] доказана следующая:

**Теорема А.** Пусть полный граф с  $R(p_1, \dots, p_s)$  вершинами обладает  $s$ -раскраской ребер, в которой для некоторого  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , существует единственная монокроматическая  $p_i$ -клика  $i$ -ого цвета и в которой нет монокроматической  $p_j$ -клики  $j$ -ого цвета при  $i \neq j$ . Тогда

$$N(R(p_1, \dots, p_s)) \geq R(p_1, \dots, p_s) + 3.$$

Если еще потребовать  $p_i \geq 4$ , тогда

$$N(R(p_1, \dots, p_s)) \geq R(p_1, \dots, p_s) + 4.$$

В настоящей работе теорема А усиливается следующим образом:

**Основная теорема.** Пусть  $p_1, \dots, p_s$  — натуральные числа,  $s \geq 2$ ,  $p_i \geq 3$ . Предположим, что полный граф с  $R(p_1, \dots, p_s)$  вершинами обладает

$s$ -раскраской ребер со следующими свойствами: для некоторого  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , существует единственная монохроматическая  $p_i$ -клика  $i$ -ого цвета и не существует монохроматическая  $p_j$ -клика  $j$ -ого цвета при  $i \neq j$ . Тогда:

а) если  $p_i = 3$ , либо граф  $K_{R-4} + \overline{C}_7$  является  $(p_1, \dots, p_s)$ -графом Рамсея, либо  $N(R(p_1, \dots, p_s)) \geq R(p_1, \dots, p_s) + 4$ ;

б) если  $p_i \geq 4$ , либо граф  $K_{R-5} + \overline{C}_9$  является  $(p_1, \dots, p_s)$ -графом Рамсея, либо  $N(R(p_1, \dots, p_s)) \geq R(p_1, \dots, p_s) + 5$  ( $R = R(p_1, \dots, p_s)$ ).

В [1] доказано, что  $N(R(3, 4)) = 14$ , так, что последнее неравенство точное.

**Определение.** Будем говорить, что  $k$ -хроматическое разложение

$$V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_k$$

множества вершин графа  $G$  является  $t$ -плотным хроматическим разложением, если объединение любых  $t$  из подмножеств  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , порождает подграф с кликовым числом, равным  $t$ .

Очевидно, что:

**Предложение 1.** Если некоторое хроматическое разложение множества вершин данного графа не является  $t$ -плотным, тогда оно не является и  $(t+1)$ -плотным.

Для дальнейшего будет нужно и:

**Предложение 2.** Если  $\chi(G) = r$ , тогда граф  $G$  обладает  $(r+1)$ -хроматическим разложением, которое не является  $t$ -плотным для любого  $t$ .

**Доказательство.** Пусть  $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_r$  является  $r$ -хроматическим разложением вершин графа  $G$ . Добавляя к этому разложению пустое множество, получаем  $(r+1)$ -хроматическое разложение, которое очевидно не является  $t$ -плотным для любого  $t$ .

Для доказательства основной теоремы будет нужна следующая:

**Теорема В.** Пусть любое  $(r+1)$ -хроматическое разложение вершин графа  $G$  является  $t$ -плотным и  $\text{cl}(G) \leq r$ . Тогда либо  $G = K_{r-4} + \overline{C}_9$ , либо  $|V(G)| \geq r+6$ .

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В И НЕСКОЛЬКИХ НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ЭТОГО ЛЕММ

**Лемма 1 ([2]).** Пусть  $G$  — граф,  $|V(G)| = r+4$ ,  $r \geq 3$ ,  $\text{cl}(G) \leq r$  и  $\chi(G) \geq r+1$ . Тогда либо  $G = K_{r-3} + G_1$ , где  $\text{cl}(G_1) = 3$  и  $\chi(G_1) = 4$ , либо существует вершина  $v \in V(G)$  такая, что  $G - v = K_{r-2} + C_8$ .

**Лемма 2.** Пусть  $|V(G)| \leq r+4$  и  $\text{cl}(G) \leq r$ . Тогда граф  $G$  обладает  $(r+1)$ -хроматическим разложением вершин, которое не является  $t$ -плотным.

**Доказательство.** Добавлением изолированных вершин можно добиться  $|V(G)| = r+4$ . Если  $r \leq 2$ , тогда граф  $G$  обладает 3-хроматическим разложением вершин и утверждение леммы очевидно. Если  $\chi(G) \leq r$ , тогда лемма 2 вытекает из предложения 2. Предположим теперь, что

$r \geq 3$  и  $\chi(G) \geq r + 1$ . Тогда для графа можно применить лемму 1. Представляются две возможности:

*Случай 1.*  $G = K_{r-3} + G_1$ , где  $\chi(G_1) = 4$  и  $\text{cl}(G_1) < 4$ .

Пусть  $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$  является 4-хроматическим разложением графа  $G_1$  и  $V(K_{r-3}) = \{z_1, \dots, z_{r-3}\}$ . Тогда

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup \{z_1\} \cup \dots \cup \{z_{r-3}\}$$

является  $(r+1)$ -хроматическим разложением графа  $G$ . Из  $\text{cl}(G_1) < 4$  вытекает, что это разложение не является 4-плотным.

*Случай 2.* Существует вершина  $v \in V(G)$  такая, что  $G - v = K_{r-2} + C_5$ .

Очевидно  $\chi(C_5) = 3$ . Пусть  $V_1 \cup V_2 \cup V_3$  является 3-хроматическим разложением графа  $C_5$  и  $V(K_{r-2}) = \{z_1, \dots, z_{r-2}\}$ . Тогда

$$(1) \quad V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{z_1\} \cup \dots \cup \{z_{r-2}\}$$

является  $(r+1)$ -хроматическим разложением графа  $G - v$ . Так как  $\text{cl}(C_5) = 2$ , то это разложение не является 3-плотным и согласно предположению 2 не является и 4-плотным. Если вершина  $v$  несмежна некоторой вершине  $z_i$ ,  $1 \leq i \leq r-2$ , тогда, группируя вершину  $v$  с этой вершиной из (1), получим  $(r+1)$ -хроматическое разложение вершин графа  $G$ , которое не является 3-плотным. Если вершина  $v$  смежна всем вершинам  $z_i$ ,  $1 \leq i \leq r-2$ , тогда попадаем в условия случая 1.

*Лемма 3.* Пусть  $u$  и  $v$  несмежные вершины графа  $G$  и  $\text{Ad}(u) \subseteq \text{Ad}(v)$ . Если  $|V(G)| = r+5$  и  $\text{cl}(G) \leq r$ , тогда граф  $G$  обладает  $(r+1)$ -хроматическим разложением, которое не является 4-плотным.

*Доказательство.* Согласно лемме 2 подграф  $G - u$  обладает  $(r+1)$ -хроматическим разложением вершин  $V_1 \cup \dots \cup V_{r+1}$ , которое не является 4-плотным. Добавим вершину  $u$  к тому из множеств  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq r+1$ , которому принадлежит вершина  $v$ . Из  $\text{Ad}(u) \subseteq \text{Ad}(v)$  следует, что таким образом получается  $(r+1)$ -хроматическое разложение вершин графа  $G$ . Ясно, что это разложение тоже не является 4-плотным.

*Лемма 4.* Пусть  $|V(G)| = r+2$ ,  $\text{cl}(G) \leq r$ ,  $r \geq 2$  и  $\alpha(G) = 2$ . Тогда дополнение  $\bar{G}$  графа  $G$  имеет два ребра без общей вершины.

*Доказательство.* Из  $\text{cl}(G) \leq r$  следует, что в  $G$  есть две несмежные вершины  $v_1$  и  $v_2$ . Если две из остальных вершин  $v_3, \dots, v_{r+2}$  несмежны, тогда лемма доказана. Предположим, что любые две из вершин  $v_3, \dots, v_{r+2}$  — смежны. Из  $\text{cl}(G) \leq r$  следует, что  $v_1$  несмежна некоторой вершине  $v_i$ ,  $3 \leq i \leq r+2$ . То же самое относится и к вершине  $v_2$ . Из  $\alpha(G) = 2$  следует, что  $v_1$  и  $v_2$  несмежны разным вершинам множества  $\{v_3, \dots, v_{r+2}\}$ . Этим лемма доказана.

*Лемма 5.* Пусть  $|V(G)| = r+5$ ,  $\text{cl}(G) \leq r$ ,  $r \geq 3$  и  $\alpha(G) = 2$ . Тогда дополнение  $\bar{G}$  графа  $G$  имеет четыре ребра, любые два из которых не имеют общую вершину.

*Доказательство.* Из  $\text{cl}(G) \leq r$  следует, что в  $G$  есть вершины  $v_1, v_2, \dots, v_6$  такие, что  $[v_1, v_2] \notin E(G)$ ,  $[v_3, v_4] \notin E(G)$  и  $[v_5, v_6] \notin E(G)$ . Остальные вершины графа  $G$  обозначим через  $v_7, \dots, v_{r+5}$ . Положим  $T = \{v_7, \dots, v_{r+5}\}$ . Если две вершины множества  $T$  несмежны, то утверждение доказано.

Предположим, что любые две вершины множества  $T$  — смежны, т. е.  $\langle T \rangle = K_{r-1}$ . Если  $v_1 \notin \text{Ad}(T)$  и  $v_2 \notin \text{Ad}(T)$ , тогда из  $\alpha(G) = 2$  следует, что  $v_1$  и  $v_2$  несмежны разным вершинам множества  $T$  и утверждение доказано. Следовательно можно предположить, что  $v_1 \in \text{Ad}(T)$ . Из аналогичных соображений можно предположить еще, что  $v_3 \in \text{Ad}(T)$  и  $v_5 \in \text{Ad}(T)$ . Так как  $\langle T \rangle = K_{r-1}$  и  $\text{cl}(G) \leq r$ , то  $\{v_1, v_3, v_5\}$  — независимое множество вершин графа  $G$ , что противоречит условию  $\alpha(G) = 2$ .

**Лемма 6.** Пусть  $|V(G)| = r + 5$ ,  $\text{cl}(G) \leq r$  и  $\alpha(G) \geq 3$ . Тогда граф  $G$  обладает  $(r + 1)$ -хроматическим разложением вершин, которое не является 4-плотным.

*Доказательство.* Если  $\chi(G) \leq r$ , лемма 6 вытекает из предложения 2. Если  $r \leq 3$ , тогда граф  $G$  очевидно обладает  $(r + 1)$ -хроматическим разложением. Так как  $\text{cl}(G) \leq r \leq 3$ , то это разложение не является 4-плотным. Предположим, что  $r \geq 4$  и  $\chi(G) > r$ . Пусть  $V(G) = \{v_1, \dots, v_{r+5}\}$ . Так как  $\alpha(G) \geq 3$ , то можно предположить, что  $\{v_1, v_2, v_3\}$  — независимое множество. Из  $\text{cl}(G) \leq r$  следует, что  $\alpha(\langle v_4, \dots, v_{r+5} \rangle) \geq 2$  и, поэтому представляются две возможности:

*Случай 1.*  $\alpha(\langle v_4, \dots, v_{r+5} \rangle) \geq 3$ . Предположим, что  $\{v_4, v_5, v_6\}$  — независимое множество, тогда

$$(2) \quad V(G) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_7\} \cup \dots \cup \{v_{r+5}\}$$

является  $(r + 1)$ -хроматическим разложением вершин графа  $G$ . Положим  $T = \{v_7, \dots, v_{r+5}\}$ . Если в  $T$  есть несмежные вершины, группируя две такие вершины, из (2) получим  $r$ -хроматическое разложение, что противоречит допущению  $\chi(G) \geq r + 1$ . Предположим, что любые две вершины множества  $T$  — смежны, т. е.  $\langle T \rangle = K_{r-1}$ . Из  $\chi(G) \geq r + 1$  вытекает, что одна из вершин  $v_1, v_2, v_3$  смежна всем вершинам множества  $T$  (иначе группируя  $v_1, v_2, v_3$  с несмежными им вершинами множества  $T$ , из (2) получим  $r$ -хроматическое разложение). Аналогичным образом заключаем, что и одна из вершин  $v_4, v_5, v_6$  смежна всем вершинам множества  $T$ . Итак, можно предположить, что  $v_1 \in \text{Ad}(T)$  и  $v_4 \in \text{Ad}(T)$ . Из  $\text{cl}(G) \leq r$  и  $\langle T \rangle = K_{r-1}$  следует, что  $[v_1, v_4] \notin E(G)$ . Если вершины  $v_5$  и  $v_6$  несмежны вершине  $v_1$ , тогда  $\text{Ad}(v_1) \subseteq \text{Ad}(v_4)$  и лемма 6 вытекает из леммы 3. Предположим, что хотя бы одна из вершин  $v_5, v_6$  смежна  $v_1$  и пусть например  $[v_1, v_5] \in E(G)$ . Из аналогичных соображений можно предположить еще, что  $[v_4, v_2] \in E(G)$ . Из  $\text{cl}(G) \leq r$  и  $\langle T \rangle = K_{r-1}$  следует, что  $v_2 \notin \text{Ad}(T)$  и  $v_5 \notin \text{Ad}(T)$ . Поэтому для вершин  $v_2$  и  $v_5$  представляются две возможности:

*Подслучай 1.а.* В  $T$  нет вершины, несмежной одновременно вершинам  $v_2$  и  $v_5$  (и следовательно они несмежны разным вершинам множества  $T$ ). Без ограничения общности можно предположить, что  $[v_2, v_7] \notin E(G)$  и  $[v_5, v_8] \notin E(G)$ . Из условия рассматриваемого подслучая вытекает, что  $[v_5, v_7] \in E(G)$ ,  $[v_2, v_8] \in E(G)$ . Если  $[v_6, v_7] \in E(G)$ , тогда  $\text{Ad}(v_2) \subseteq \text{Ad}(v_7)$  и лемма 6 вытекает из леммы 3. Если  $[v_3, v_8] \in E(G)$ , тогда  $\text{Ad}(v_5) \subseteq \text{Ad}(v_8)$  и опять лемма 6 вытекает из леммы 3. Если  $[v_3, v_8] \notin E(G)$  и  $[v_6, v_7] \notin E(G)$ , тогда  $(\text{Ad}(v_7) \cap \text{Ad}(v_8)) \setminus T = \{v_1, v_4\}$  и так как  $[v_1, v_4] \notin E(G)$ , то пер-

вые четыре подмножества  $(r+1)$ -хроматического разложения (2) порождают подграф без 4-клик и следовательно оно не является 4-плотным.

*Подслучай 1.6.* В  $T$  есть вершина, которая несмежна одновременно  $v_2$  и  $v_5$ . Пусть например  $[v_2, v_7] \notin E(G)$  и  $[v_5, v_7] \notin E(G)$ . Для пар  $[v_3, v_7]$  и  $[v_6, v_7]$  представляются следующие возможности:

I.  $[v_3, v_7] \notin E(G)$  и  $[v_6, v_7] \notin E(G)$ . В этой ситуации  $\text{Ad}(v_7) \setminus T = \{v_1, v_4\}$ . Так как  $[v_1, v_4] \notin E(G)$ , то первые три подмножества  $(r+1)$ -хроматического разложения (2) порождают подграф без 3-клик и следовательно это разложение не является 3-плотным. Согласно предложению 1 разложение (2) не является и 4-плотным.

II. Одна из вершин  $v_3, v_6$  смежна  $v_7$ , а другая — нет. Пусть например  $[v_6, v_7] \in E(G)$  и  $[v_3, v_7] \notin E(G)$ . Если  $v_6$  несмежна некоторой вершине из множества  $\{v_8, \dots, v_{r+5}\}$ , например  $[v_6, v_8] \notin E(G)$ , тогда  $(\text{Ad}(v_7) \cap \text{Ad}(v_8)) \setminus T = \{v_3, v_4\}$ . Как уже было отмечено выше, из этого вытекает, что первые четыре подмножества  $(r+1)$ -хроматического разложения (2) порождают подграф без 4-клик и следовательно оно не является 4-плотным. Если  $v_6 \in \text{Ad}(T)$ , тогда из  $\text{cl}(G) \leq r$  следует, что  $\{v_1, v_4, v_6\}$  — независимое множество. Так как  $\text{Ad}(v_7) \setminus T = \{v_1, v_4, v_6\}$ , то из этого вытекает, что первые три подмножества разложения (2) порождают подграф без 3-клик и следовательно оно не является 3-плотным. Из предложения 1 вытекает, что это разложение не является 4-плотным.

III.  $[v_3, v_7] \in E(G)$  и  $[v_6, v_7] \in E(G)$ . Если  $v_3$  и  $v_6$  несмежны разным вершинам множества  $\{v_8, \dots, v_{r+5}\}$  и например —  $[v_3, v_8], [v_6, v_9] \notin E(G)$ , тогда из разложения (2) получаем новое  $(r+1)$ -хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_7\} \cup \{v_8, v_3\} \cup \{v_9, v_6\} \cup \dots,$$

в котором первые три подмножества порождают подграф без 3-клик. Согласно предложению 1 новополученное  $(r+1)$ -хроматическое разложение не является 4-плотным. Если  $v_3$  и  $v_6$  несмежны одной и той же вершине множества  $\{v_8, \dots, v_{r+5}\}$  и например  $[v_3, v_8], [v_6, v_8] \notin E(G)$ , тогда  $(\text{Ad}(v_7) \cap \text{Ad}(v_8)) \setminus T = \{v_1, v_4\}$ . Так как  $[v_1, v_4] \notin E(G)$ , то первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик. Остается рассмотреть ситуацию когда хотя бы одна из вершин  $v_3, v_6$  смежна всем вершинам множества  $T$ . Без ограничения общности можно предположить, что  $v_3 \in \text{Ad}(T)$ . Если еще  $v_6 \in \text{Ad}(T)$ , тогда из  $\text{cl}(G) \leq r$  вытекает, что  $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$  — независимое множество вершин графа  $G$ . Из этого вытекает, что первые три подмножества разложения (2) порождают подграф без 3-клик и согласно предложению 1 это разложение не является 4-плотным. Если вершина  $v_6 \notin \text{Ad}(T)$  и например  $[v_6, v_8] \notin E(G)$ , тогда  $(\text{Ad}(v_7) \cap \text{Ad}(v_8)) \setminus T = \{v_1, v_3, v_4\}$ . Так как  $\{v_1, v_3, v_4\}$  — независимое множество вершин графа  $G$  (иначе  $\text{cl}(G) > r$ ), то из последнего равенства вытекает, что первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик.

*Случай 2.*  $\alpha(\langle v_4, \dots, v_{r+5} \rangle) = 2$ . Применяя лемму 4 к подграфу  $\langle v_4, \dots, v_{r+5} \rangle$ , заключаем, что можно предположить  $[v_4, v_5] \notin E(G)$  и



$[v_6, v_7] \notin E(G)$ . Тогда

$$(3) \quad V(G) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \dots \cup \{v_{r+5}\}$$

является  $(r+1)$ -хроматическим разложением вершин графа  $G$ . Положим  $T = \{v_8, \dots, v_{r+5}\}$ . Так как  $r \geq 4$ , то  $T \neq \emptyset$ . Рассуждая так же как и для разложения (2), заключаем, что из  $\chi(G) > r$  вытекает  $\langle T \rangle = K_{r-2}$  и что можно предположить  $v_1, v_4, v_6 \in \text{Ad}(T)$ . Из  $\text{cl}(G) \leq r$  следует, что  $\{v_1, v_4, v_6\}$  не является 3-кликой графа  $G$ . Для вершин  $v_5$  и  $v_7$  представляются следующие возможности:

*Подслучай 2.а.* В  $T$  есть вершина, которая несмежна вершинам  $v_5$  и  $v_7$ . Предположим для определенности, что  $[v_5, v_8] \notin E(G)$  и  $[v_7, v_8] \notin E(G)$ . В этой ситуации для вершин  $v_2$  и  $v_3$  есть следующие возможности:

I.  $[v_2, v_8] \notin E(G)$  и  $[v_3, v_8] \notin E(G)$ . Ясно, что  $\text{Ad}(v_8) \setminus T = \{v_1, v_4, v_6\}$ . Так как  $\{v_1, v_4, v_6\}$  не является 3-кликой, то объединение первых четырех подмножеств разложения (3) порождает подграф без 4-клик и следовательно это разложение не является 4-плотным.

II. Одна из вершин  $v_2, v_3$  смежна  $v_8$ , а другая — нет. Пусть например  $[v_2, v_8] \notin E(G)$  и  $[v_3, v_8] \in E(G)$ . Если вершина  $v_3$  несмежна некоторой из вершин  $v_9, \dots, v_{r+5}$  и например  $[v_3, v_9] \notin E(G)$ , тогда из (3) получаем новое  $(r+1)$ -хроматическое разложение вершин графа  $G$

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \cup \dots,$$

в котором объединение первых четырех подмножеств порождает подграф без 4-клик и следовательно это разложение не является 4-плотным. Если  $v_3 \in \text{Ad}(T)$ , тогда из  $\text{cl}(G) \leq r$  следует, что  $\langle v_1, v_3, v_4, v_6 \rangle$  не содержит 3-клик. Так как  $\text{Ad}(v_8) \setminus T = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ , то объединение первых четырех подмножеств разложения (3) порождает подграф без 4-клик.

III. Вершина  $v_8$  смежна вершинам  $v_2$  и  $v_3$ . Если  $v_2 \in \text{Ad}(T)$  и  $v_3 \in \text{Ad}(T)$ , тогда из  $\langle T \rangle = K_{r-2}$  и  $\text{cl}(G) \leq r$  следует, что  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\} = \text{Ad}(v_8) \setminus T$  не содержит 3-клик и следовательно объединение первых четырех подмножеств разложения (3) порождает подграф без 4-клик. Если  $v_2 \in \text{Ad}(T)$  и  $v_3 \notin \text{Ad}(T)$  и например  $[v_3, v_9] \notin E(G)$ , тогда из разложения (3) получаем новое  $(r+1)$ -хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \cup \dots,$$

в котором объединение первых четырех подмножеств порождает подграф без 4-клик. Если  $v_2 \notin \text{Ad}(T)$  и  $v_3 \notin \text{Ad}(T)$ , тогда группируя  $v_2$  и  $v_3$  с несмежными им вершинами множества  $T$ , из разложения (3) получаем новое  $(r+1)$ -хроматическое разложение, в котором объединение первых четырех подмножеств порождает подграф без 4-клик.

*Подслучай 2.б.* Вершины  $v_5$  и  $v_7$  несмежны разным вершинам множества  $T$ . Пусть например  $[v_5, v_8] \notin E(G)$  и  $[v_7, v_9] \notin E(G)$ . Можно предположить еще, что  $[v_5, v_9] \in E(G)$  и  $[v_7, v_8] \in E(G)$  так как иначе попадаем в условия подслучая 2.а. Если  $[v_4, v_6] \notin E(G)$ , тогда  $\langle v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9 \rangle$  не содержит 4-клик и следовательно  $(r+1)$ -хроматическое разложение (3) вершин графа  $G$  не является 4-плотным. Предположим, что  $[v_4, v_6] \in E(G)$ .



Но тогда либо  $[v_1, v_6] \notin E(G)$ , либо  $[v_1, v_4] \notin E(G)$ , так как  $\{v_1, v_4, v_6\}$  не является 3-кликкой. Без ограничения общности можно предположить, что  $[v_1, v_4] \notin E(G)$ . Для вершин  $v_2$  и  $v_3$  представляются следующие возможности:

I.  $[v_2, v_8] \notin E(G)$  и  $[v_3, v_8] \notin E(G)$ . В этой ситуации объединение вершины  $v_8$  с первыми двумя подмножествами разложения (3) порождает подграф без 3-клик и следовательно это разложение не является 3-плотным. Согласно предложению 1 разложение (3) не является и 4-плотным.

II. Одна из вершин  $v_2, v_3$  смежна вершине  $v_8$ , а другая — нет. Пусть например  $[v_2, v_8] \notin E(G)$  и  $[v_3, v_8] \in E(G)$ . Если вершина  $v_3$  несмежна некоторой вершине множества  $\{v_9, \dots, v_{r+5}\}$ , тогда группируя  $v_3$  с такой вершиной, из разложения (3) получаем новое  $(r+1)$ -хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \dots$$

Так как  $\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_8\}$  не содержит 3-клик, то последнее  $(r+1)$ -хроматическое разложение не является 3-плотным. Согласно предложению 1 это разложение не является и 4-плотным. Если  $v_3 \in \text{Ad}(T)$  из  $\text{cl}(G) \leq r$  и  $\langle T \rangle = K_{r-2}$  следует, что  $\{v_3, v_4, v_6\}$  не является 3-кликкой. Так как  $[v_4, v_6] \in E(G)$ , то либо  $[v_3, v_4] \notin E(G)$ , либо  $[v_3, v_6] \notin E(G)$ . Если  $[v_3, v_4] \notin E(G)$ , тогда вершина  $v_8$  вместе с первыми двумя подмножествами разложения (3) порождают подграф без 3-клик. Согласно предложению 1  $(r+1)$ -хроматическое разложение (3) не является 4-плотным. Если  $[v_3, v_6] \notin E(G)$ , тогда из разложения (3) получаем новое  $(r+1)$ -хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_6\} \cup \{v_7, v_9\} \cup \dots,$$

в котором первые три подмножества порождают подграф без 3-клик. Согласно предложению 1 последнее  $(r+1)$ -хроматическое разложение не является 4-плотным.

III.  $[v_2, v_8] \in E(G)$  и  $[v_3, v_8] \in E(G)$ . В этой ситуации очевидно, что  $\text{Ad}(v_5) \subseteq \text{Ad}(v_8)$  и лемма 6 вытекает из леммы 3.

*Подслучай 2.а.* Одна из вершин  $v_5, v_7$  принадлежит  $\text{Ad}(T)$ , а другая — нет. Пусть например  $v_7 \in \text{Ad}(T)$  и  $[v_5, v_8] \notin E(G)$ . Из  $\text{cl}(G) \leq r$  следует, что  $\{v_1, v_4, v_6, v_7\}$  не содержит 3-клик. Если  $[v_2, v_8] \in E(G)$  и  $[v_3, v_8] \in E(G)$ , тогда  $\text{Ad}(v_5) \subseteq \text{Ad}(v_8)$  и лемма 6 вытекает из леммы 3. Если  $[v_2, v_8] \notin E(G)$  и  $[v_3, v_8] \notin E(G)$ , тогда  $\text{Ad}(v_8) \setminus T = \{v_1, v_4, v_6, v_7\}$ . Так как  $\{v_1, v_4, v_6, v_7\}$  не содержит 4-клик, то объединение первых четырех подмножеств разложения (3) порождает подграф без 4-клик. Если  $[v_2, v_8] \notin E(G)$  и  $[v_3, v_8] \in E(G)$ , тогда для  $v_3$  представляются две возможности:

I. Вершина  $v_3$  несмежна некоторой из вершин  $v_9, \dots, v_{r+5}$ . Пусть например  $[v_3, v_9] \notin E(G)$ . Тогда из (3) получаем новое  $(r+1)$ -хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \cup \dots,$$

в котором объединение первых четырех подмножеств порождает подграф без 4-клик.

II.  $v_3 \in \text{Ad}(T)$ . Из  $\text{cl}(G) \leq r$  и  $\langle T \rangle = K_{r-2}$  следует, что  $\langle v_1, v_3, v_4, v_6, v_7 \rangle$  не содержит 3-клик. Так как  $\text{Ad}(v_8) \setminus T = \{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7\}$ , то первые четыре подмножества разложения (3) порождают подграф без 4-клик.

*Подслучай 2.2.*  $v_5 \in \text{Ad}(T)$  и  $v_7 \in \text{Ad}(T)$ . Если  $v_2 \notin \text{Ad}(T)$  и  $[v_2, v_i] \notin E(G)$ ,  $8 \leq i \leq r+5$ , тогда  $\text{Ad}(v_2) \subseteq \text{Ad}(v_i)$  и лемма 6 вытекает из леммы 3. Если  $v_3 \notin \text{Ad}(T)$  рассуждаем аналогично. Если  $v_2 \in \text{Ad}(T)$  и  $v_3 \in \text{Ad}(T)$ , тогда из  $\text{cl}(G) \leq r$  и  $\langle T \rangle = K_{r-2}$  следует, что объединение первых трех подмножеств  $(r+1)$ -хроматического разложения (3) порождает подграф без 3-клик. Согласно предложению 1 разложение (3) не является 4-плотным.

Лемма 6 доказана.

*Доказательство теоремы В.* Допустим, что  $|V(G)| \leq r+5$ . Докажем, что  $G = K_{r-4} + \overline{C_9}$ . Согласно лемме 2  $|V(G)| = r+5$ , а согласно предложению 2

$$(4) \quad \chi(G) \geq r+1.$$

Согласно лемме 6  $\alpha(G) = 2$ . Из  $\alpha(G) = 2$  и  $R(3,3) = 6$  вытекает  $\text{cl}(G) \geq 3$ . Так как  $\text{cl}(G) \leq r$ , то  $r \geq 3$ . Сделанные рассуждения показывают, что граф  $G$  удовлетворяет условиям леммы 5 и следовательно существуют вершины  $v_1, \dots, v_8 \in V(G)$  такие, что  $[v_1, v_2] \notin E(G)$ ,  $[v_3, v_4] \notin E(G)$ ,  $[v_5, v_6] \notin E(G)$ ,  $[v_7, v_8] \notin E(G)$ . Остальные вершины графа  $G$  обозначим  $T = \{v_9, \dots, v_{r+5}\}$ . Тогда

$$(5) \quad V(G) = \{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_9\} \cup \dots \cup \{v_{r+5}\}$$

является  $(r+1)$ -хроматическим разложением вершин графа  $G$ . Заметим, что  $T \neq \emptyset$ , т. е.  $r \geq 4$  (иначе  $r = 3$  и так как  $\text{cl}(G) \leq r$ , граф  $G$  не содержит 4-клик и следовательно разложение (5) не является 4-плотным). Любые две вершины множества  $T$  смежны, т. е.  $\langle T \rangle = K_{r-3}$  (иначе группируя две несмежные вершины множества  $T$ , из (5) получим  $r$ -хроматическое разложение графа  $G$ , что противоречит неравенству (4)). Одна из вершин  $v_1, v_2$  смежна всем вершинам множества  $T$  (иначе группируя  $v_1$  и  $v_2$  с несмежными им вершинами множества  $T$ , из (5) получим  $r$ -хроматическое разложение, что снова противоречит неравенству (4)). Без ограничения общности можно предположить, что  $v_1 \in \text{Ad}(T)$ . Из аналогичных соображений можно предположить еще, что  $v_3, v_5, v_7 \in \text{Ad}(T)$ . Из  $\text{cl}(G) \leq r$  и  $\langle T \rangle = K_{r-3}$  следует, что  $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$  не является 4-кликой. Прежде всего докажем, что две из вершин  $v_2, v_4, v_6, v_8$  принадлежат  $\text{Ad}(T)$ , а другие две — нет. Допустим, что это не так. Тогда для вершин  $v_2, v_4, v_6, v_8$  представляются следующие возможности:

*Случай 1.*  $v_2, v_4, v_6, v_8 \notin \text{Ad}(T)$ . Так как  $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$  не является 4-кликой графа  $G$ , то можно предположить, что  $[v_1, v_3] \notin E(G)$ . Если в  $T$  есть вершина, которая несмежна вершинам  $v_2$  и  $v_4$  и например  $[v_2, v_9]$ ,  $[v_4, v_9] \notin E(G)$ , тогда  $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9 \rangle$  не содержит 3-клик и следовательно разложение (5) не является 3-плотным. Это противоречит предложению 1. Если  $v_2$  и  $v_4$  несмежны разным вершинам множества  $T$  и например  $[v_2, v_9] \notin E(G)$ ,  $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$ , тогда  $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_{10} \rangle$  не содержит

4-клик. Получили, что разложение (5) не является 4-плотным, что является противоречием.

*Случай 2.* Одна из вершин  $v_2, v_4, v_6, v_8$  принадлежит  $\text{Ad}(T)$ , а остальные три — нет. Пусть например  $v_2, v_4, v_6 \notin \text{Ad}(T)$  и  $v_8 \in \text{Ad}(T)$ . Если хотя бы одна из пар  $[v_1, v_3], [v_1, v_5], [v_3, v_5]$  не является ребром графа  $G$ , повторяя буквально рассуждения случая 1, достигаем до противоречия. Поэтому предположим, что  $\{v_1, v_3, v_5\}$  является 3-кликой графа  $G$ . Из  $\text{cl}(G) \leq r$  и  $\langle T \rangle = K_{r-3}$  вытекает  $v_7 \notin \text{Ad}(v_1, v_3, v_5)$  и  $v_8 \notin \text{Ad}(v_1, v_3, v_5)$ . Вершины  $v_7$  и  $v_8$  несмежны разным вершинам 3-клики  $\{v_1, v_3, v_5\}$ , так как иначе  $\alpha(G) \geq 3$ , что противоречит условию  $\alpha(G) = 2$ . Без ограничения общности можно предположить, что  $[v_1, v_7] \notin E(G)$  и  $[v_3, v_8] \notin E(G)$ . Для вершин  $v_2$  и  $v_4$  представляются две возможности:

I. Некоторая вершина множества  $T$  несмежна вершинам  $v_2$  и  $v_4$ . Пусть например  $[v_2, v_9], [v_4, v_9] \notin E(G)$ . Тогда  $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9 \rangle$  не содержит 4-клик, т. е. разложение (5) не является 4-плотным, что является противоречием.

II. Вершины  $v_2$  и  $v_4$  несмежны разным вершинам множества  $T$ . Пусть например  $[v_2, v_9] \notin E(G)$  и  $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$ . Тогда

$$\{v_1, v_7\} \cup \{v_3, v_8\} \cup \{v_2, v_9\} \cup \{v_4, v_{10}\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \dots$$

является  $r$ -хроматическим разложением вершин графа  $G$ , что противоречит неравенству (4).

*Случай 3.* Три из вершин  $v_2, v_4, v_6, v_8$  принадлежат  $\text{Ad}(T)$ , а четвертая — нет. Пусть например  $v_4, v_6, v_8 \in \text{Ad}(T)$  и  $[v_2, v_9] \notin E(G)$ . В этом случае  $\text{Ad}(v_2) \subseteq \text{Ad}(v_9)$ , что противоречит лемме 3.

*Случай 4.*  $v_2, v_4, v_6, v_8 \in \text{Ad}(T)$ . Из  $\text{cl}(G) \leq r$  и  $\langle T \rangle = K_{r-3}$  вытекает, что  $\langle v_1, v_2, \dots, v_8 \rangle$  не содержит 4-клик и следовательно разложение (5) не является 4-плотным.

Итак, доказано, что две из вершин  $v_2, v_4, v_6, v_8$  принадлежат  $\text{Ad}(T)$ , а другие две — нет. Без ограничения общности можно предположить, что  $v_2, v_4 \notin \text{Ad}(T)$  и  $v_6, v_8 \in \text{Ad}(T)$ . В этой ситуации из  $\text{cl}(G) \leq r$  и  $\langle T \rangle = K_{r-3}$  следует, что подграф  $\langle v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8 \rangle$  не содержит 4-клик. Покажем, что из этого вытекает, что  $v_2$  и  $v_4$  несмежны одной и той же вершине множества  $T$ . Допустим, что это неверно и пусть например  $[v_2, v_9] \notin E(G)$  и  $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$ . Тогда из (5) получаем новое  $(r+1)$ -хроматическое разложение

$$\{v_1\} \cup \{v_3\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_2, v_9\} \cup \{v_4, v_{10}\} \cup \dots,$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик. Итак, можно предположить, что  $[v_2, v_9] \notin E(G)$  и  $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$ . Вершина  $v_9$  вместе с первыми тремя подмножествами разложения (5) порождает подграф, содержащий 4-клик. Из этого вытекает, что либо  $\{v_1, v_3, v_5\}$ , либо  $\{v_1, v_3, v_6\}$  является 3-кликой графа  $G$ . Без ограничения общности можно предположить, что  $\{v_1, v_3, v_5\}$  является 3-кликой графа  $G$ . Из аналогичных рассуждений можно предположить, что  $\{v_1, v_3, v_7\}$  тоже является 3-кликой графа  $G$ . Из  $\text{cl}(G) \leq r$  вытекает  $[v_5, v_7] \notin E(G)$ , а из последнего и  $\alpha(G) = 2$  следует  $[v_5, v_8] \in E(G)$  и  $[v_6, v_7] \in E(G)$ . Так как под-

граф  $(v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8)$  не содержит 4-клик, то  $\{v_1, v_3, v_5, v_8\}$  и  $\{v_1, v_3, v_6, v_7\}$  не являются 4-кликами. Вместе с  $[v_5, v_8], [v_6, v_7] \in E(G)$  это дает, что  $v_6, v_8 \notin \text{Ad}(v_1, v_3)$ . Представляются две возможности:

I. Вершины  $v_6$  и  $v_8$  несмежны одновременно хотя бы одной из вершин  $v_1, v_3$ . Пусть например  $[v_1, v_6] \notin E(G)$  и  $[v_1, v_8] \notin E(G)$ . Тогда  $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9)$  не содержит 4-клик. Это означает, что разложение (б) не является 4-плотным.

II. Одна из вершин  $v_6, v_8$  несмежна вершине  $v_1$ , а другая — вершине  $v_3$ . Без ограничения общности можно предположить, что  $[v_1, v_6] \notin E(G)$  и  $[v_3, v_8] \notin E(G)$ . В этой ситуации упорядоченное подмножество  $\{v_1, v_2, v_9, v_4, v_3, v_8, v_7, v_5, v_6\}$  вершин графа  $G$  является 9-циклом его дополнения  $\bar{G}$ . Этим доказано, что  $G \subseteq K_{r-4} + \bar{C}_9$ .

Осталось доказать, что  $G = K_{r-4} + \bar{C}_9$ . Для этого достаточно доказать, что после удаления произвольного ребра графа  $K_{r-4} + \bar{C}_9$  получается подграф, обладающий  $(r+1)$ -хроматическим разложением вершин, которое не является 4-плотным. Из-за существующих симметрий графа  $K_{r-4} + \bar{C}_9$  достаточно рассмотреть только следующие случаи:

*Случай 1.* От графа  $K_{r-4} + \bar{C}_9$  удалится ребро подграфа  $K_{r-4}$ . Пусть  $V(K_{r-4}) = \{w_1, \dots, w_{r-4}\}$  и  $\bar{C}_9 = \{u_1, \dots, u_9\}$  (рис. 1). Без ограничения общности можно предположить, что удаляется ребро  $[w_1, w_2]$ . Тогда

$\{u_1, u_2\} \cup \{u_3, u_4\} \cup \{u_5, u_6\} \cup \{u_7, u_8\} \cup \{u_9\} \cup \{w_1, w_2\} \cup \{w_3\} \cup \dots \cup \{w_{r-4}\}$  является  $r$ -хроматическим разложением полученного подграфа. Согласно

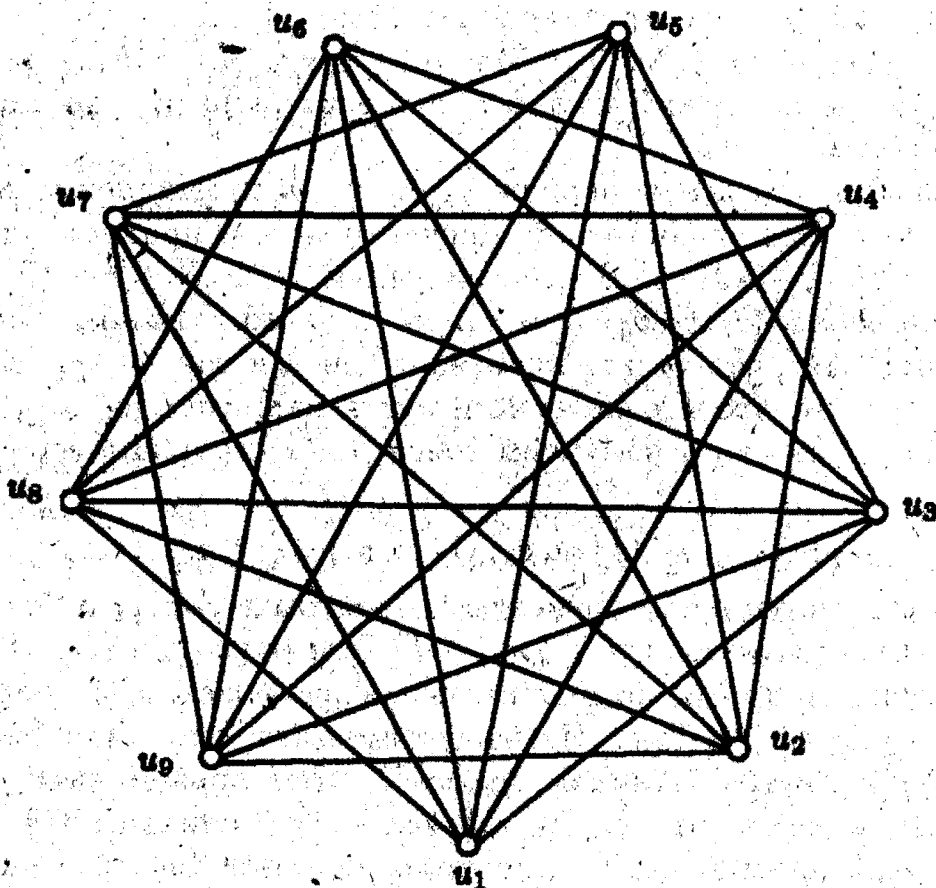


Рис. 1

предложению 2 этот подграф обладает  $(r+1)$ -хроматическим разложением, которое не является 4-плотным.

*Случай 2.* Удаляется ребро вида  $[w_i, u_j]$ ,  $1 \leq i \leq r-4$ ,  $1 \leq j \leq 9$ . Без ограничения общности можно предположить, что удаляется ребро  $[w_1, u_1]$ . Тогда

$$\{w_1, u_1\} \cup \{u_2, u_3\} \cup \{u_4, u_5\} \cup \{u_6, u_7\} \cup \{u_8, u_9\} \cup \{w_2\} \cup \dots \cup \{w_{r-4}\}$$

является  $r$ -хроматическим разложением полученного подграфа. Согласно предложению 2 этот подграф обладает  $(r+1)$ -хроматическим разложением, которое не является 4-плотным.

*Случай 3.* Удаляется ребро  $[u_1, u_3]$ . Тогда

$$\{u_1, u_2, u_3\} \cup \{u_4, u_5\} \cup \{u_6, u_7\} \cup \{u_8, u_9\} \cup \{w_1\} \cup \dots \cup \{w_{r-4}\}$$

является  $r$ -хроматическим разложением полученного подграфа. Согласно предложению 2 этот подграф обладает  $(r+1)$ -хроматическим разложением, которое не является 4-плотным.

*Случай 4.* От графа  $K_{r-4} + \bar{C}_9$  удаляется ребро  $[u_1, u_4]$ . В этом случае

$$\{u_1, u_4\} \cup \{u_5, u_6\} \cup \{u_7, u_8\} \cup \{u_9\} \cup \{u_2, u_3\} \cup \{w_1\} \cup \dots \cup \{w_{r-4}\}$$

является  $(r+1)$ -хроматическим разложением полученного подграфа. Первые четыре подмножества этого разложения порождают  $\bar{C}_7$ . Очевидно  $\bar{C}_7$  не содержит 4-клик, так что это  $(r+1)$ -хроматическое разложение не является 4-плотным.

*Случай 5.* От графа  $K_{r-4} + \bar{C}_9$  удаляется ребро  $[u_1, u_5]$ . В этом случае

$$\{u_1, u_2\} \cup \{u_3, u_4\} \cup \{u_5\} \cup \{u_6, u_7\} \cup \{u_8, u_9\} \cup \{w_1\} \cup \dots \cup \{w_{r-4}\}$$

является  $(r+1)$ -хроматическим разложением вершин полученного подграфа. Первые три подмножества этого разложения порождают подграф, изоморфный  $\bar{C}_5$ . Так как  $\bar{C}_5$  не содержит 3-клик, то полученное  $(r+1)$ -хроматическое разложение не является 3-плотным. Согласно предложению 1 оно не является и 4-плотным.

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Пусть  $p_1, \dots, p_s$  — натуральные числа,  $s \geq 2$ ,  $p_i \geq 3$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Для краткости положим  $R = R(p_1, \dots, p_s)$ . Будут нужны следующие леммы:

**Лемма 7 ([5]).** Если  $\chi(G) < R(p_1, \dots, p_s)$ , тогда граф  $G$  не является  $(p_1, \dots, p_s)$ -графом Рамсея.

**Лемма 8.** Пусть  $G$  является  $(p_1, \dots, p_s)$ -графом Рамсея с  $cl(G) < R$  и  $|V(G)| \leq R+4$ . Тогда  $\chi(G) = R$ .

*Доказательство.* Добавлением изолированных вершин можно добиться  $|V(G)| = R+4$ . Согласно лемме 7 достаточно доказать неравенство  $\chi(G) \leq R$ . Пусть  $V(G) = \{v_1, \dots, v_{R+4}\}$ . Рассмотрим два случая:

*Случай 1.*  $\alpha(G) \geq 3$ . Пусть  $\{v_1, v_2, v_3\}$  независимое множество вершин графа  $G$ . Если  $\alpha(\{v_4, \dots, v_{R+4}\}) \geq 3$  и  $\{v_4, v_5, v_6\}$  тоже независимое множество, тогда

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_7\} \cup \dots \cup \{v_{R+4}\}$$

является  $R$ -хроматическим разложением графа  $G$  и следовательно  $\chi(G) \leq R$ . Если  $\alpha((v_4, \dots, v_{R+4})) = 2$ , тогда применяя лемму 4 к подграфу  $(v_4, \dots, v_{R+4})$ , где  $r = R - 1$ , убеждаемся, что можно предположить  $[v_4, v_5]$ ,  $[v_6, v_7] \notin E(G)$ . Разложение

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \dots \cup \{v_{R+4}\}$$

является  $R$ -хроматическим разложением вершин графа  $G$  и следовательно  $\chi(G) \leq R$ .

*Случай 2.*  $\alpha(G) = 2$ . Согласно лемме 5 ( $r = R - 1$ ) можно предположить, что  $[v_1, v_2]$ ,  $[v_3, v_4]$ ,  $[v_5, v_6]$  и  $[v_7, v_8]$  не являются ребрами графа  $G$ . Но тогда

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_9\} \cup \dots \cup \{v_{R+4}\}$$

является  $R$ -хроматическим разложением вершин и следовательно  $\chi(G) \leq R$ .

**Лемма 9.** Пусть  $p_1, \dots, p_s$  — натуральные числа,  $p_i \geq 3$ ,  $s \geq 2$  и полный граф с  $R = R(p_1, \dots, p_s)$  вершинами обладает  $s$ -раскраской ребер со следующим свойством: для некоторого  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , существует единственная монохроматическая  $p_i$ -клика  $i$ -ого цвета и не существует монохроматическая  $p_j$ -клика  $j$ -ого цвета при  $i \neq j$ . Тогда, если граф  $G$  является  $(p_1, \dots, p_s)$ -графом Рамсея и  $\chi(G) = R$ , то любое  $R$ -хроматическое разложение вершин графа  $G$  является  $p_i$ -плотным.

**Доказательство.** Рассмотрим  $s$ -раскраску ребер  $K_R$ , в которой существует единственная монохроматическая  $p_i$ -клика  $i$ -ого цвета и не существует монохроматическая  $p_j$ -клика  $j$ -ого цвета при  $i \neq j$ . Пусть  $V(K_R) = \{z_1, \dots, z_R\}$  и предположим, что  $\{z_1, \dots, z_{p_i}\}$  является единственной  $p_i$ -кликкой  $i$ -ого цвета. Допустим, что существует  $R$ -хроматическое разложение

$$V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_R$$

вершин графа  $G$ , которое не является  $p_i$ -плотным. Без ограничения общности можно предположить, что первые  $p_i$  подмножества этого  $R$ -хроматического разложения порождают подграф без  $p_i$ -клик, т. е.  $\text{cl}((V_1 \cup \dots \cup V_{p_i})) < p_i$ . Рассмотрим отображение  $\varphi: V(G) \rightarrow V(K_R)$ , определенное следующим образом: если  $v \in V_i$ , тогда  $\varphi(v) = z_i$ . При помощи отображения  $\varphi$  и данной  $s$ -раскраски ребер  $K_R$  строим  $s$ -раскраску ребер графа  $G$  следующим образом: ребро  $[u, v] \in E(G)$  имеет такой же цвет, что и ребро  $[\varphi(u), \varphi(v)]$  графа  $K_R$ . Покажем, что полученная  $s$ -раскраска ребер графа  $G$  не содержит монохроматическую  $p_k$ -кликку  $k$ -ого цвета для любого  $k$ ,  $1 \leq k \leq s$ . Допустим противное, т. е. для некоторого  $k$  существует монохроматическая  $p_k$ -кликка  $k$ -ого цвета  $Q$ . Тогда  $\varphi(Q)$  является монохроматической  $p_k$ -кликкой  $k$ -ого цвета данной  $s$ -раскраски ребер  $K_R$ . Из свойств этой раскраски вытекает, что  $k = i$  и  $\varphi(Q) = \{z_1, \dots, z_{p_i}\}$ . Это означает, что  $Q \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_{p_i}$ , что является противоречием, так как мы предположили, что подграф  $(V_1 \cup \dots \cup V_{p_i})$  не содержит  $p_i$ -клик.

**Доказательство основной теоремы.** Предположим, что выполнено требование  $p_i = 3$  подусловия а). Допустим, что существует  $(p_1, \dots, p_s)$ -граф Рамсея  $G$  с  $\text{cl}(G) < R$  и  $|V(G)| \leq R + 3$ . Добавлением



изолированных вершин можно добиться  $|V(G)| = R+3$ . Из леммы 8 вытекает  $\chi(G) = R$ . Согласно лемме 9 любое  $R$ -хроматическое разложение вершин графа  $G$  является 3-плотным. С другой стороны, согласно лемме 1 ( $r = R-1$ ) либо существует вершина  $v \in V(G)$ , такая что  $G-v = K_{R-3} + C_5$ , либо  $G = K_{R-4} + G_1$ . Пусть  $G-v = K_{R-3} + C_5$ . В этом случае  $G$  обладает  $R$ -хроматическим разложением, которое не является 3-плотным (см. доказательство леммы 2). Пусть теперь  $G = K_{R-4} + G_1$ . В [2] доказано, что либо  $G_1$  является подграфом графа  $\overline{K}_2 + C_5$ , либо  $G_1 = \overline{C}_7$ . Если  $G \subseteq \overline{K}_2 + C_5$ , тогда  $G \subseteq K_{R-4} + \overline{K}_2 + C_5$ . Граф  $K_{R-4} + \overline{K}_2 + C_5$  очевидно обладает  $R$ -хроматическим разложением вершин, которое не является 3-плотным. Но тогда и  $G$  обладает таким  $R$ -хроматическим разложением. Окончательно получаем  $G = K_{R-4} + \overline{C}_7$ .

Предположим, что выполнено требование  $p_i \geq 4$  подусловия б). Допустим, что существует  $(p_1, \dots, p_r)$ -граф Рамсея  $G$  с  $\text{cl}(G) < R$  и  $|V(G)| \leq R+4$ . Добавлением изолированных вершин можно добиться  $|V(G)| = R+4$ . Согласно лемме 8  $\chi(G) = R$ . Согласно лемме 9 любое  $R$ -хроматическое разложение вершин графа  $G$  является  $p_i$ -плотным и так как  $p_i \geq 4$ , то оно является 4-плотным. Согласно теореме В ( $r = R-1$ ) граф  $G = K_{R-5} + \overline{C}_9$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н е н о в, Н. О (3, 4)-графах Рамсея без 9-клик. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и инф., 85, 1991, 71–81.
2. Н е н о в, Н. Некоторые применения чисел Зыкова в теорию Рамсея. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 74, 1980, 25–50.
3. Н е н о в, Н. Усиление неравенств Лина, относящихся к теорию Рамсея. — Докл. БАН, 34, 1981, 307–310.
4. R a m s e y, P. On a problem of formal logic. — London Math. Soc., 30, 1930, 264–286.
5. L i n, S. On Ramsey numbers and  $K_r$ -coloring of graphs. — J. Combin. Theory, Ser. B, 12, 1972, 82–92.
6. N e s e t r i l, J., V. R ö d l. Partition theory and its applications. — London Math. Soc., Lecture Note Series, 38, 1979, 96–149.
7. G r i n s t e a d, C., S. R o b e r t s. On the Ramsey numbers  $R(3, 8)$  and  $R(3, 9)$ . — J. Combin. Theory, Ser. B, 33, 27–51.

Поступила 2.02.1993