ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 87, 1993

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 87, 1993

РЕШЕНИЕ НА ПРОБЛЕМ НА ФЬОДОРОВ-ГРЮНБАУМ

НИКОЛА МАРТИНОВ

Никола Мартинов. РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ ФЬОДОРОВА-ГРЮНБАУМА

Определяем в полности множество $\mathcal{L}$ пар (n, f) целых чисел, для которых существует размещение из n прямых и f клеток, или в другой интерпретации — для которых существует зоноэдр с n зонами и $2f$ вершинами. Пара (n, f) принадлежит $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные целые числа k и t, для которых $t \leqq \binom{k}{2}$ и такие, что $n \geqq k+t+2$ и $f = (n-k)(k+1) + \binom{k}{2} - t$. Для каждых k и t точки (n, f), удовлетворяющие этим условиям, образуют множество $R(k,t)$, совпадающее с целочисленными точками одного луча, и эти множества $R(k,t)$ непересекающиеся. Далее, каждая точка $(n, f) \in \mathcal{L}$ может быть получена из легко описываемого размещения прямых. Получены и некоторые характерные свойства размещений, соответствующие одной и той же паре $(n, f) \in \mathcal{L}$.

Nicola Martinov. A SOLUTION TO A PROBLEM OF FEDOROV-GRÜNBAUM

We determine copletely the set $\mathcal{L}$ of pairs (n, f) of integers for which there exist arrangements with n lines and f cells or, in other interpretation, for which there exists a zonohedra with n zones and $2f$ vertices. The pair (n, f) is in $\mathcal{L}$ if and only if there are non-negative integers k and t satisfying $t \leqq \binom{k}{2}$ such that $n \geqq k+t+2$ and $f = (n-k)(k+1) + \binom{k}{2} - t$. For each k and t the points (n, f) satisfying these conditions are all the lattice points on a halfline $R(k,t)$, and these halflines are disjoint. Moreover, each point $(n, f) \in \mathcal{L}$ can be obtained from an easily described arrangement. We have found out also some characteristic properties of the arrangements corresponding to one and the same pair $(n, f) \in \mathcal{L}$.

1. ВЪВЕДЕНИЕ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Ще използваме терминологията на Грюнбаум [4] с малка модификация. Мрежа от прави A наричаме всяка крайна фамилия от $n(A) \geqq 2$ различни прави в реалната проективна равнина P. С мрежата A асоциираме 2-мерния клетъчен комплекс, получен от разбиването на P от правите на A; върховете, ръбовете и клетките (многоъгълниците) на комплекса са върхове, ръбове и клетки на мрежата. С $f(A)$ означаваме броя на клетките на мрежата A, а двойката $(n(A), f(A))$ наричаме допустима двойка, съответстваща на мрежата A. Множеството на допустимите двойки, съответстващи на всевъзможните мрежи, означаваме с $\mathcal{L}$ и наричаме f-диаграма. Проблемът за определяне кога една целочислена двойка (n, f) принадежи на $\mathcal{L}$ се дискутира от Грюнбаум [4], а много преди това (в друга интерпретация) и от руския кристалограф Фьодоров [10]. Основна цел на тази статия е пълното определяне на f-диаграмата $\mathcal{L}$.

Ако v е връх, то $t(v)$ е степента му, т. е. броят на правите, инцидентни с v. С $t(A)$ означаваме максималната степен на върховете на мрежата A. Ако g е права на мрежата, $r(g)$ е броят на върховете, инцидентни с g. С $r(A)$ означаваме максималния брой на върховете, инцидентни с права на мрежата A. Ако $t(A) = 2$, A се нарича проста мрежа, а ако $t(A) = n(A) = n$, A се нарича n-сноп.

Непосредствено се съобразява, че за всяка мрежа A с n прави е изпълнено

$$n \leqq f(A) \leqq \binom{n}{2} + 1,$$

като равенство отляво се достига, когато A е сноп, а равенство отдясно — когато A е проста мрежа.

Целите числа от интервала $J = \left[n, \binom{n}{2} + 1\right]$, които не са измежду стойностите на $f(A)$ за мрежа A с n прави, наричаме недопустими. Лесно се съобразява, че отворените подинтервали на J:

$$J_1 = (n, 2n-2) \text{ за } n \geqq 4 \quad \text{и} \quad J_2 = (2n-2, 3n-6) \text{ за } n \geqq 6,$$

съдържат само недопустими числа. Според хипотеза 2.4 на Грюнбаум [4], доказана по-рано ([1], [10], а за $n \geqq 40$ в [7]), подинтервалът

$$J_3 = (3n-5, 4n-12) \text{ за } n \geqq 9$$

също съдържа само недопустими числа. В [5] са намерени всички подинтервали на J, които съдържат само недопустими числа, а следователно и всички допустими двойки (n, f) при фиксирано n. Тук чрез модифициране и доразвиване на някои детайли на изложението в [5] ще получим както пълно описание на съвкупността $\mathcal{L}$, така и различни характеризации на някои от класовете на получената класификация.

Доказателствата, които тук се дават (с изключение на доказателството на теорема 1), са чисто комбинаторни, което означава, че резултатите са в сила и за мрежите от псевдоправи, а също и за ориентираните матроиди с ранг 3.

Резултатите за мрежи от прави се отнасят пряко и за зоноедрите. Зоноедър се нарича всеки изпъкнал многостен, чиито стени са централно-симетрични многоъгълници (и, както е известно, той е централно-симетричен). Зоноедрите са въведени и частично изучавани от руския кристалограф Фьодоров [10] при изследване на геометричния строеж на кристалите. Зона на зоноедъра се нарича всеки цикъл от последователни съседни стени, чиито общи ръбове са взаимно успоредни. Както е известно [2], мрежите от прави са комбинаторно еквивалентни със зоноедрите: на правите, върховете и клетките на мрежа съответстват зоните, двойките срещуположни стени и двойките срещуположни върхове на зоноедър. Следователно проблемът за намиране на всички възможности за броя на клетките на мрежа с n прави (при произволно n), който проблем тук е решен окончателно, може да се счита, че води началото си от изследванията на Фьодоров от 1885 г. Аналогичният проблем за определяне на възможностите за броя на върховете на мрежа с n прави, т. е. за определяне на възможностите за броя на стените на зоноедрите с n зони, е решаван в [3], [6], [8] и др., но още не е получил окончателно решение.

В [8] се посочва, че резултатите за възможностите за броя на върховете на мрежите (а вероятно и другите резултати за мрежи от прави) са свързани и със статистическата физика.

2. ПРЕДВАРИТЕЛНИ РЕЗУЛТАТИ

От нагледни съображения лесно се стига до следната

Лема 1. *Ако A е мрежа с n прави, за броя на клетките ѝ е изпълнено*

$$f(A) = \binom{n}{2} + 1 - \sum_{k>2} \binom{k-1}{2} t_k(A),$$

където с $t_k(A)$ е означен броят на върховете със степен k.

Доказателство. Ще докажем лемата при по-общото предположение, когато A се състои от псевдоправи, т. е. от непрекъснати линии, всеки две от които се пресичат еднократно. Тогава трансформираме A в проста мрежа A' (пак от псевдоправи) по следния начин. Ако v е връх със степен $k \geqq 3$, а l — псевдоправа през него, заменяме достатъчно малка дъга от l, която съдържа v, с нова, която не минава през v и пресича останалите $k-1$ псевдоправи през v в различни точки. Така получаваме псевдоправа l', която разделя $k-1$ от клетките на по две части. Следователно мрежата, която се получава от A чрез заменяне на l с l', ще има $k-2$ клетки повече от клетките на A. Като постъпим по същия начин със следваща псевдоправа през v, броят на клетките ще се увеличи допълнително с $k-3$

и т. н. Следователно, когато степента на v стане 2, първоначалният брой на клетките ще се е увеличил със

$$k-2+k-3+\cdots+1=\binom{k-1}{2}.$$

Така постъпваме последователно с всички върхове със степен $\geqq 3$ и в резултат получаваме мрежата A'. Като сумираме намерените увеличения на броя на клетките за всеки връх със степен $\geqq 3$ и вземем предвид, че мрежата A' има $\binom{n}{2}+1$ клетки, получаваме твърдението на лемата.

Лесно се съобразява [4, с. 14], че е в сила

Лема 2. *Ако мрежата A не е сноп, то*

$$f(A) \geqq 2n(A)-2.$$

Ще докажем

Лема 3. *Нека мрежата A има $n \geqq 8$ прави и $f(A) \leqq 3n-5$. Тогава*

$$t(A) \geqq n-2. \tag{1}$$

Доказателство. Ако A е сноп, то $t(A)=n>n-2$. По-нататък ще предполагаме, че A не е сноп. Ще приложим индукция по n.

1. Нека $n=8$. Тогава чрез заместване и прилагане на лема 1 получаваме

$$3n-5=19,$$

$$f(A)=\binom{n}{2}+1-\sum_{k>2}\binom{k-1}{2}t_k(A)=29-\sum_{k>2}\binom{k-1}{2}t_k(A).$$

Следователно

$$\sigma=\sum_{k>2}\binom{k-1}{2}t_k(A) \geqq 10. \tag{2}$$

От $n(A)=8$ следва непосредствено (или от [4, с. 22]), че

$$t_3(A) \leqq 7, \quad t_4(A) \leqq 2, \quad t_5(A) \leqq 1.$$

Нека $t(A)=3$. Тогава $\sigma \leqq 7$ и идваме до противоречие с (2).

Нека $t(A)=4$. Тогава, както непосредствено се проверява, ако $t_4(A)=1$, то $t_3(A) \leqq 6$, и ако $t_4(A)=2$, то $t_3(A) \leqq 3$. Следователно и в двата случая получаваме $\sigma \leqq 9$, което противоречи на (2).

Нека $t(A)=5$. Тогава или $t_4(A)=1$ и $t_3(A)=0$, или $t_4(A)=0$ и $t_3(A) \leqq 3$. Отново при двете възможности получаваме $\sigma \leqq 9$ и пак имаме противоречие с (2).

Следователно за $t(A)$ остава единствено възможността $t(A) \geqq 6$, което искахме да докажем, за да е изпълнено (1) в този случай.

2. Нека $n>8$. Приемаме, че лемата е в сила за всяка мрежа A^* с $n-1$ прави, за която е изпълнено $f(A^*) \leqq 3n(A^*)-5$.

Тъй като A не е сноп, има права g на A, която съдържа поне 3 от върховете на A. Тогава за броя на клетките на мрежата $A^* = A\backslash g$ получаваме

$$(3) \qquad f(A^*) = f(A) - r(g) \leqq f(A) - 3 \leqq 3(n-1) - 5.$$

От (3) съгласно индукционното предположение получаваме

$$t(A^*) \geqq n(A^*) - 2 = n - 3.$$

Ако правата g минава през върха на A^*, който има максимална степен (която е поне $n-3$), то очевидно изпълнено е (1). Нека g не минава през този връх. Тогава върху g ще лежат поне $n-3$ от върховете на A, т. е. $r(g) \geqq n-3$, и ще получим следното доуточняване на (3):

$$(3') \qquad f(A^*) = f(A) - r(g) \leqq f(A) - n + 3 \leqq 2(n-1).$$

Оттук съгласно лема 2 получаваме, че A^* е сноп. Следователно $t(A) \geqq t(A^*) = n(A^*) = n - 1$. С това доказателството на лемата е завършено.

Както вече споменахме, валидността на хипотеза 2.4 на Грюнбаум [4] е установена. Следователно в сила е

Лема 4. *Ако A е мрежа с $f(A) < 4n(A) - 12$, то $f(A) \leqq 3n(A) - 5$.*

Ще докажем

Лема 5. *Ако мрежата A е различна от сноп и $n(A) \geqq 10$, то $r(A) \geqq 5$.*

Доказателство. 1. Нека $f(A) < 4n(A) - 12$. От лема 4 получаваме $f(A) \leqq 3n(A) - 5$. Оттук и от лема 3 следва, че $t(A) \geqq n(A) - 2 \geqq 8$. Следователно $r(A) \geqq t(A) \geqq 8$.

2. Нека $f(A) \geqq 4n(A) - 12$. За броя на ръбовете на A ще бъде изпълнено $f_1(A) \geqq \dfrac{3}{2} f(A)$. Следователно

$$r(A) \geqq \left] \frac{f_1(A)}{n(A)} \right[\geqq \left] 6 - \frac{18}{10} \right[= 5.$$

Тук с $]x[$ се означава най-малкото цяло число, което не е по-малко от x.

3. МРЕЖИ, СЪСТАВЕНИ ОТ СНОП И ПРОСТА МРЕЖА

Нека p, k и s са неотрицателни цели числа и такива, че $s \leqq \min\{p-2, \binom{k}{2}\}$; приемаме, че $\binom{0}{2} = \binom{1}{2} = 0$. Означаваме с $\mathbf{B}^s_{p,k}$ съвкупността на мрежите, всяка от които е обединение на p-сноп с проста мрежа с k прави, като простата мрежа не съдържа прави от снопа, но s от върховете ѝ са инцидентни с прави от снопа. От въведеното ограничение за s непосредствено се съобразява, че такива мрежи има. Ще покажем, че всички двойки (n, f) от $\mathcal{L}$ съответстват на мрежите, които принадлежат на фамилиите $\mathbf{B}^s_{p,k}$. В тази точка ще опишем съвкупността $\mathcal{F}$ на допустимите двойки (n, f), съответстващи на мрежите от фамилиите $\mathbf{B}^s_{p,k}$, а в т. 4 ще покажем, че $\mathcal{L} = \mathcal{F}$.

Лема 6. *Ако* $A \in \mathbf{B}^s_{p,k}/k \geqq 0, 0 \leqq s \leqq \binom{k}{2}, p \geqq s+2$, *то*

$$f(A) = p(k+1) + \binom{k}{2} - s.$$

Доказателство. От $A \in \mathbf{B}^s_{p,k}$ следва, че $n(A) = p+k$ и че A има (освен върховете си със степен 2) един връх със степен p и s върха със степен 3. Оттук съгласно лема 1 получаваме

$$f(A) = \binom{p+k}{2} + 1 - \binom{p-1}{2} - s = p(k+1) + \binom{k}{2} - s.$$

Съгласно лема 6 всички мрежи от фамилията $\mathbf{B}^s_{p,k}$ определят една и съща допустима двойка $(n, f) : n = p + k, \ f = p(k+1) + \binom{k}{2} - s$. Ще казваме, че тази двойка съответства на фамилията $\mathbf{B}^s_{p,k}$. Непосредствено получаваме

Лема 7. *Нека n и $k \leqq n-2$ са неотрицателни цели числа, а S_k е интервалът $[a_k, b_k]$, където*

$$b_k = (n-k)(k+1) + \binom{k}{2}, \quad a_k = b_k - \min\{n-k-2, \binom{k}{2}\}.$$

Тогава за всяко $f \in S_k$ двойката $(n, f) \in \mathcal{F}$; тази двойка съответства на фамилията $\mathbf{B}^s_{n-k,k}$, където $s = b_k - f$.

Лема 8. *Нека k и s са неотрицателни цели числа и такива, че $s \leqq \binom{k}{2}$. Тогава съвкупността*

$$R(k, s) = \{(n(A), f(A)) \mid A \in \mathbf{B}^s_{p,k}, \ p \geqq s+2\}$$

съвпада със съвкупността на целочислените точки (в декартови координати) на лъча

$$H(k, s) = \{(x, y) \mid y = (k+1)x - (k+1)k + \binom{k}{2} - s, \quad x \geqq k+s+2\}. \tag{4}$$

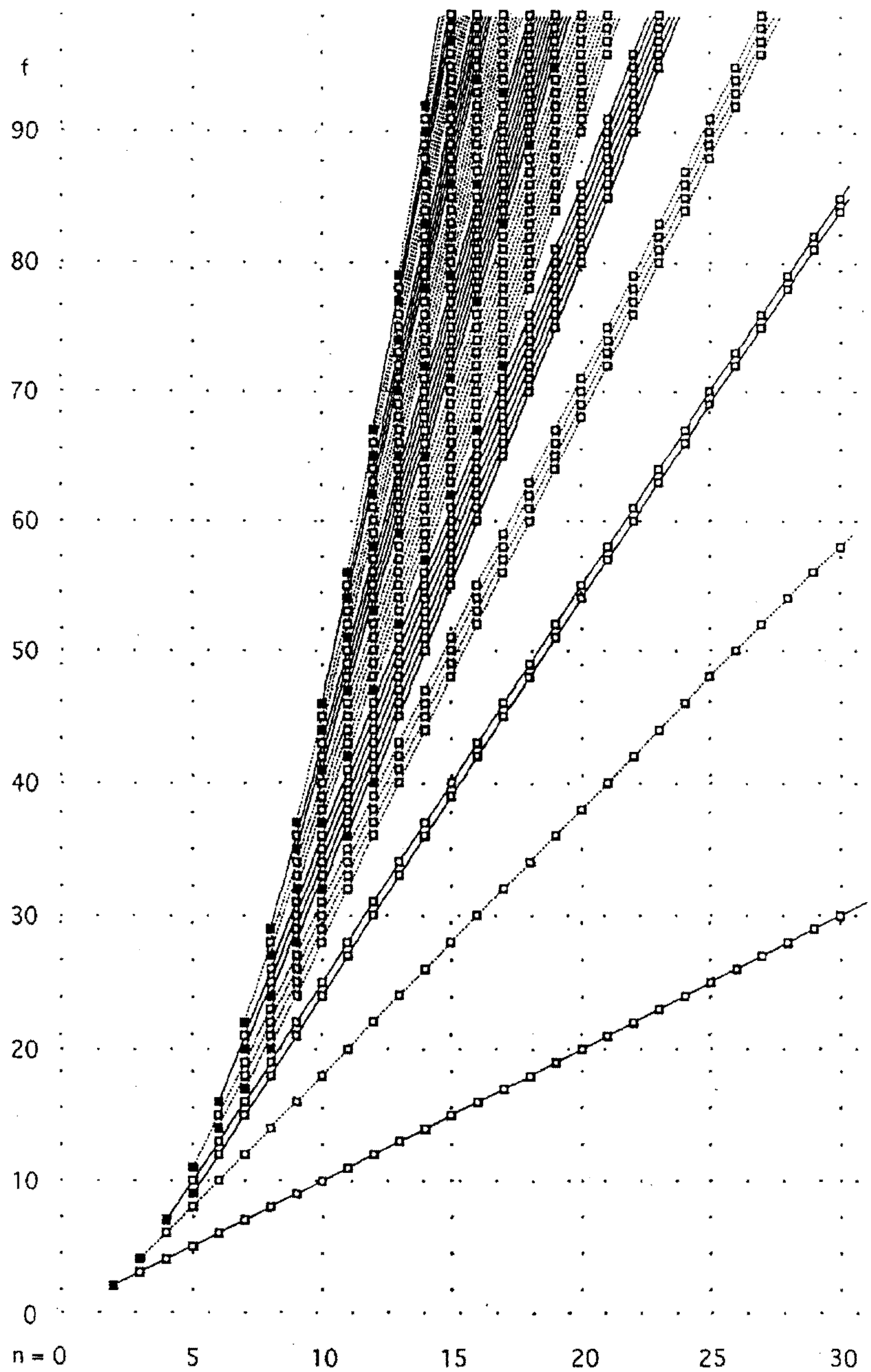
Доказателство. Уравнението на лъча $H(k, s)$ можем да представим във вида

$$y = (k+1)(x-k) + \binom{k}{2} - s, \quad s \leqq x - k - 2.$$

Тогава, като положим $x - k = p$ и вземем предвид, че $s \leqq \binom{k}{2}$, получаваме

$$y = p(k+1) + \binom{k}{2} - s, \quad s \leqq \min\{p-2, \binom{k}{2}\}.$$

Оттук се вижда, че целочислените точки на лъча $H(k, s)$ се получават за целочислените стойности на параметъра p, а съгласно лема 6 тези точки са точно допустимите двойки, съответстващи на фамилиите $\mathbf{B}^s_{p,k}$, т. е. тези точки са точно елементите на съвкупността $R(k, s)$.



Представено е изображение на f-диаграма. Точките (n, f) в f-диаграмата са означени с малки квадрати. Линиите, които ги свързват, са лъчите $H(k, s)$, определящи множествата $R(k, s)$. Началните точки на тези лъчи са означени с плътни квадрати. За всяка от последователните стойности на k съответстващите $\binom{k}{2}$ успоредни лъча са означени по един и същ начин — редуващо се с плътни и пунктирани линии.

Следствие 1. *Лъчите $H(k,s)$ и $H(g,t)$ са успоредни точно тогава, когато $g = k$, т. е. когато тези лъчи пресичат правата $x = n$ в един и същ интервал S_k, определен в лема 7.*

Ще покажем, че при $g \neq k$ лъчите $H(k,s)$ и $H(g,t)$ също нямат обща целочислена точка, т. е. че е в сила

Теорема 1. *Всяка допустима двойка $(n,f) \in \mathcal{F}$ съответства само на една фамилия $\mathbf{B}^s_{p,k}/k \geqq 0,\ 0 \leqq s \leqq \binom{k}{2},\ p \geqq s+2$.*

Доказателство. Допускаме, че твърдението не е вярно. Нека допустимата двойка (n,f) е точка както от лъча $H(k,s)$, така и от лъча $H(g,t)$. Тъй като тези лъчи не са успоредни, то $g \neq k$. Приемаме, че $g > k$. От $(n,f) \in H(k,s)$ съгласно (4) получаваме

$$f = (k+1)n - \frac{k^2+3k}{2} - s, \quad n \geqq k+s+2. \tag{5}$$

Аналогично от $(n,f) \in H(g,t)$ получаваме

$$f = (g+1)n - \frac{g^2+3g}{2} - t, \quad n \geqq g+t+2. \tag{6}$$

1. Нека $g = k+1$. Тогава от равенствата при (5) и (6) чрез почленно изваждане получаваме

$$n = k+2+t-s \leqq k+t+2, \tag{7}$$

а от оценките за n при (5) и (6) имаме

$$n \geqq g+t+2 = k+t+3,$$

което противоречи на (7).

2. Нека $g \geqq k+2$. Сега от равенствата при (5) и (6) чрез почленно изваждане получаваме

$$2(t-s) = (g-k)(2n-g-k-3).$$

Оттук, като използваме оценките за n от (5) и (6), намираме следното противоречие:

$$2(t-s) \geqq (g-k)(s+t+1) \geqq 2s+2t+2.$$

С това доказателството на теоремата е завършено.

4. МНОЖЕСТВОТО $\mathcal{L}$ НА ВСИЧКИ ДОПУСТИМИ ДВОЙКИ (n,f)

Теорема 2 (основна теорема). *Нека $k \geqq 3$ е естествено число. За всяка мрежа A с $n(A) \geqq \binom{k+1}{2} + 3$, която е различна от сноп, са в сила следните три твърдения:*

A_k. *Ако* $f(A) \leqq kn(A) - \binom{k+1}{2} + 1$, *то* $t(A) \geqq n(A) - k + 1$;

B_k. $r(A) \geqq k + \frac{1}{2}(k-3) + \frac{15}{k^2+k+6}$;

C_k. *Ако* $f(A) < (k+1)(n(A)-k)$, *то* $f(A) \leqq kn(A) - \binom{k+1}{2} + 1$.

Доказателство. Ще приложим индукция по k. При $k = 3$ теоремата е изпълнена: A_3 и C_3 съвпадат съответно с лемите 3 и 4; B_3 следва от това, че $r(A) \geqq 4$ винаги когато A има поне 7 прави. Предполагаме $k > 3$ и изпълнението на A_{k-1}, B_{k-1} и C_{k-1} за всяка мрежа A^*, *която не е сноп и има* поне $\binom{k}{2} + 3$ прави. Тези две изисквания са изпълнени, ако мрежата A^* е получена от A чрез отстраняване на права и $f(A) < 2n(A) - 2$; по-нататък само в такива случаи ще прилагаме индукционното предположение.

Доказателство на A_k. Ако $f(A) < k(n(A) - k + 1)$, от C_{k-1} получаваме $f(A) \leqq (k-1)n(A) - \binom{k}{2} + 1$. Оттук с използване на A_{k-1} намираме, че $t(A) \geqq n(A) - k + 2$. Следователно остава да докажем твърдението A_k, когато

$$f(A) = k(n(A) - k + 1) + m, \quad 0 \leqq m \leqq \binom{k-1}{2}.$$

Доказателството ще извършим с индукция по m. Нека g е права на A с $r(g) = r(A)$. От B_{k-1} (когато $k > 4$) и от лема 5 (когато $k = 4$) следва, че $r(A) \geqq k + 1$. Следователно за мрежата $A^* = A \backslash g$ ще е изпълнено

$$(8) \quad f(A^*) = f(A) - r(g) \leqq k(n(A) - k + 1) + m - k - 1 = k(n(A) - k) + m - 1.$$

1. Нека $m = 0$. Тогава от (8) следва, че $f(A^*) < k(n(A^*) - k + 1)$, и съгласно C_{k-1} получаваме $f(A^*) \leqq (k-1)n(A^*) - \binom{k}{2} + 1$. Оттук и от A_{k-1} заключаваме, че $t(A) \geqq t(A^*) \geqq n(A^*) - k + 2 = n(A) - k + 1$.

2. Нека сега $m > 0$ и предполагаме, че A_k е изпълнено при по-малки стойности на m. От това индукционно предположение и от (8) следва, че $t(A^*) \geqq n(A^*) - k + 1$, откъдето $t(A) \geqq n(A) - k$. Следователно $r(A) \geqq t(A) \geqq n(A) - k$. Оттук получаваме следната по-точна от (8) оценка за $f(A^*)$:

$$f(A^*) = f(A) - r(A) \leqq k(n(A) - k + 1) + m - n(A) + k = kn(A^*) - k^2 + 2k + m - n(A).$$

Но $n(A) - m \geqq \binom{k+1}{2} + 3 - \binom{k-1}{2} = 2k + 2$. Следователно $f(A^*) < k(n(A^*) - k + 1)$. Оттук съгласно C_{k-1} получаваме $f(A^*) \leqq (k-1)n(A^*) - \binom{k}{2} + 1$ и като приложим A_{k-1}, заключаваме, че $t(A) \geqq t(A^*) \geqq n(A^*) - k + 2 = n(A) - k + 1$.

Доказателство на B_k. 1. Нека $f(A) \leqq kn(A) - \binom{k+1}{2} + 1$. Тогава от доказаното вече твърдение A_k получаваме $t(A) \geqq n(A) - k + 1 \geqq \binom{k+1}{2} + 3 - k + 1 = \binom{k}{2} + 4$. Следователно в този случай B_k е изпълнено.

2. Нека $f(A) > kn(A) - \binom{k+1}{2} + 1$. *Тъй като за броя* $f_1(A)$ *на ръбовете* имаме $f_1(A) \geqq \frac{3}{2} f(A)$ и $r(A) \geqq \frac{f_1(A)}{n(A)}$, то в този случай получаваме

$$r(A) \geqq \frac{3f(A)}{2n(A)} \geqq \frac{3k}{2} - \frac{3(k^2+k-4)}{2(k^2+k+6)} = \frac{3}{2}(k-1) + \frac{15}{k^2+k+6}.$$

Доказателство на $\mathrm{C_k}$. Допускаме, че твърдението $\mathrm{C_k}$ не е вярно. Нека A е мрежа с минимален брой прави, за която е изпълнено

$$(9)\quad n(A) = n \geqq \binom{k+1}{2} + 3 \quad \text{и} \quad kn - \binom{k+1}{2} + 1 < f(A) < (k+1)(n-k).$$

Нека g е права на A с $r(g) = r(A)$. Съгласно вече доказаното $\mathrm{B_k}$ (и лема 5 при $k=4$) ще е изпълнено $r(A) \geqq k+2$ и за мрежата $A^* = A\backslash g$ получаваме

$$f(A^*) = f(A) - r(g) < (k+1)(n(A)-k) - (k+2) < (k+1)(n(A^*)-k).$$

Нека $n(A) > \binom{k+1}{2} + 3$. Тогава $n(A^*) \geqq \binom{k+1}{2} + 3$ и тъй като (9) не е изпълнено за мрежи с по-малко от $n(A)$ прави, то

$$(10)\qquad f(A^*) \leqq kn(A^*) - \binom{k+1}{2} + 1.$$

Неравенството (10) е изпълнено и когато $n(A) = \binom{k+1}{2} + 3$, защото тогава интервалът $S_k = [kn(A) - \binom{k+1}{2} + 1, (k+1)(n(A)-k)]$ съдържа само едно цяло число и то е $f(A)$. Следователно числото $f(A)$ е с единица по-голямо от левия край на интервала S_k. Оттук и от $f(A^*) = f(A) - r(g) \leqq f(A) - k - 2$ следва, че (10) е изпълнено.

От (10), като приложим доказаното вече твърдение $\mathrm{A_k}$, получаваме $t(A^*) \geqq n(A^*) - k + 1$, откъдето следват $t(A) \geqq n(A) - k$ и $r(A) \geqq t(A) \geqq n(A) - k$. Оттук намираме по-точна от (10) оценка за $f(A^*)$: $f(A^*) < (k+1)(n(A)-k) - (n(A)-k) = k(n(A^*) - k + 1)$. Тогава, като приложим $\mathrm{C_{k-1}}$, получаваме $f(A^*) \leqq (k-1)n(A^*) - \binom{k}{2} + 1$ и $f(A) \leqq f(A^*) + n(A) - 1 \leqq kn(A) - \binom{k+1}{2} + 1$. Полученото противоречие с (9) доказва верността на твърдението $\mathrm{C_k}$.

Ще отбележим, че теоремата е в сила и при $k = 1, 2, 3$, тъй като интервалите J_1, J_2, J_3 съдържат само недопустими числа.

Теорема 3. *Нека n и $k \leqq n-2$ са естествени числа, а J_k е интервалът (b_{k-1}, a_k), където $b_k = (n-k)(k+1) + \binom{k}{2}$, $a_k = b_k - \min\{n-k-2, \binom{k}{2}\}$. Тогава за всяко $f \in J_k$ не съществува мрежа с n прави и f клетки.*

Доказателство. Ще разгледаме отделно два допълващи се случая.

1. Нека $n \geqq \binom{k+1}{2} + 3$. В този случай $n-k-2 > \binom{k}{2}$ и $a_k = (n-k)(k+1)$. Съгласно твърдението $\mathrm{C_k}$ на теорема 2, ако за произволна мрежа A с n прави е изпълнено $f(A) < a_k$, то $f(A) \leqq kn - \binom{k+1}{2} + 1 = b_{k-1}$. Следователно $f(A)$ е извън интервала J_k, т. е. теоремата е изпълнена за този случай.

2. Нека $n < \binom{k+1}{2} + 3$. Сега $n-k-2 \leqq \binom{k}{2}$ и $a_k = (n-k)k + \binom{k}{2} + 2$. В този случай за дължината на интервала J_k получаваме

$$a_k - b_{k-1} = (n-k)k + \binom{k}{2} + 2 - kn + \binom{k+1}{2} - 1 = 1.$$

Това означава, че интервалът $J_k = (b_{k-1}, a_k)$ не съдържа цели числа. Следователно и в този случай няма число $f \in J_k$, такова че двойката (n, f) да е допустима, т. е. да има мрежа с n прави и f клетки. С това доказателството на теоремата е завършено.

От теорема 3 и лема 7 непосредствено получаваме

Следствие 2. *Двойката (n, f) принадлежи на $\mathcal{L}$ точно тогава, когато има цяло число k и $0 \leqq k \leqq n-2$, за което е изпълнено*

$$(n-k)(k+1) + \binom{k}{2} - \min\left\{n-k-2, \binom{k}{2}\right\} \leqq f \leqq (n-k)(k+1) + \binom{k}{2}.$$

От следствие 2, като вземем предвид, че $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$, и лема 7, получаваме

Следствие 3. *Съвкупностите $\mathcal{L}$ и $\mathcal{F}$ съвпадат.*

5. НЯКОИ СВОЙСТВА НА МРЕЖИТЕ, СЪОТВЕТСТВАЩИ НА ЕДНА И СЪЩА ДОПУСТИМА ДВОЙКА

Съгласно теоремите 3 и 1 на всяка двойка $(n, f) \in \mathcal{L}$ съответства единствена фамилия $\mathbf{B}^s_{p,k} / k \geqq 0, 0 \leqq s \leqq \binom{k}{2}, p \geqq s+2$, като мрежите на фамилията имат по n прави и f клетки. Ще сравним спрямо някои характеристики тези мрежи с останалите, които също имат по n прави и f клетки.

Теорема 4. *Нека (n, f) е допустима двойка, $\Omega(n, f)$ е съвкупността на мрежите, имащи по n прави и f клетки, а B е мрежа от фамилията $\mathbf{B}^s_{p,k} \subset \Omega(n, f)$. Тогава за всяка мрежа $A \in \Omega(n, f)$ е изпълнено $t(A) \leqq t(B)$.*

Доказателство. От $B \in \mathbf{B}^s_{p,k}$ и от лема 1 следва

$$n = n(B) = p + k, \quad f = f(B) = \binom{n}{2} + 1 - \binom{n-k-1}{2} - s,$$

$$s \leqq \min\left\{n-k-2, \binom{k}{2}\right\}.$$

Освен това $t(B) = p = n - k$. Допускаме, че $t(A) > t(B)$, т. е. че $t(A) = n - k + m$, $m > 0$. Тогава от лема 1 получаваме

$$f(A) \leqq \binom{n}{2} + 1 - \binom{n-k+m-1}{2} \leqq \binom{n}{2} + 1 - \binom{n-k-1}{2} - m(n-k-1).$$

Следователно $f(A) = f(B) + s - m(n-k-1) < f(B)$. Полученото противоречие изключва възможността $t(A) > t(B)$. Следователно $t(A) \leqq t(B)$. С това доказателството на теоремата е завършено.

Нека n и k са естествени числа, удовлетворяващи условието

$$n \geqq \binom{k+2}{2} + 3. \tag{11}$$

Тогава за всяко цяло f от интервала $S_k = [a_k, b_k]$, определен в лема 7, двойката $(n, f) \in \mathcal{L}$ и за мрежите от $\Omega(n, f)$, имащи по n прави и f клетки, ще е в сила теорема 2. За всяка мрежа $A \in \Omega(n, f)$ е в сила първото твърдение на теорема 2, формулирано за $k+1$ вместо за k, а именно

A_{k+1}. Ако $f(A) \leqq b_k$, то $t(A) \geqq n-k$.

От друга страна, съгласно лема 7 фамилията $\mathbf{B}^s_{n-k,k}$, където $s = b_k - f$, се съдържа в $\Omega(n, f)$ и съгласно теорема 4 е изпълнено $t(A) \leqq n-k$. Следователно

$$t(A) = n - k. \tag{12}$$

И така (12) ще е изпълнено за всяка мрежа $A \in \Omega(n, f)$, където $f \in S_k$, а k удовлетворява (11), като максималната стойност f_0 на f е стойността на b_k за максималното k, удовлетворяващо (11). Но съгласно теорема 3 и лема 7 допустимите двойки (n, f) се получават само за стойности на f от интервала S_k. Следователно, щом $(n, f) \in \mathcal{L}$ и $f \leqq f_0$, то за мрежите от $\Omega(n, f)$ ще бъде изпълнено (12), т. е. те ще имат една и съща максимална степен на върховете. Като вземем предвид, че $b_k = (n-k)(k+1) + \binom{k}{2}$ расте заедно с k и че за максималната стойност k_0 на k, удовлетворяваща (11), е изпълнено

$$\frac{1}{2}(\sqrt{8n-23} - 5) < k_0 \leqq \frac{1}{2}(\sqrt{8n-23} - 3),$$

получаваме

$$f_0 = b_{k_0} = (n-k_0)(k_0+1) + \binom{k_0}{2} \geqq k_0 n + 4 > \frac{n}{2}(\sqrt{8n-23} - 5) + 4 > n(\sqrt{2n} - 4) + 4.$$

Така установяваме валидността на

Теорема 5. *Нека $(n, f) \in \mathcal{L}$, а $\Omega(n, f)$ е класът мрежи, имащи по n прави и f клетки. Ако $f \leqq n(\sqrt{2n} - 4) + 4$, то всички мрежи от $\Omega(n, f)$ имат една и съща максимална степен на върховете.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Cordovil, R. Sur l'évaluation $t(M; 2, 0)$ du Tutte d'une matroïde et conjecture de Grünbaum rélative aux arrangements de droites du plan. — European J. Combin., I, 1980, 317–322.
2. Coxeter, H. S. M. The classification of zonohedra by means of projective diagrams. — J. Math. Pures Appl., **41**, 1962, 137–156.
3. Erdös, P. On a problem of Grünbaum. — Canad. Math. Bull., **15**, 1972, 23–25.
4. Grünbaum, B. Arrangements and Spreads. — American Mathematical Society, Providence, RI, 1972.
5. Martinov, N. Classification of Arrangements by the Number Cells. — Discrete Comput. Geom., 9, 1993, 39–46.
6. Martinov, N. On a constant of Erdös. — C. R. Acad. Bulg., **44**, 1991, 8, 21–24.
7. Purdy, G. B. On the number of regions determined by n lines in the projective plane. — Geom. Dedicata, 9, 1980, 107–109.

8. S a l a m o n, P., P. E r d ö s. The solution to a problem of Gŕunbaum. — Canad. Math. Bull., **31**, 1988, 129–138.
9. М а р т и н о в, Н. Върху хипотеза 2.4 на Грюнбаум. В: *Доклади на 19-ата конференция на СБМ*, 1990, 112–117.
10. Ф ё д о р о в, Е. С. Начала учения о фигурах. Ленинград, Изд. АН СССР, 1953.

Постъпила на 28.02.1994