
ДВИЖЕНИЕ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКИХ КАПИЛЛЯРНЫХ СТРУЙ

СТЕФАН РАДЕВ

Стефан Радев. ДВИЖЕНИЕ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКИХ КАПИЛЛЯРНЫХ СТРУЙ

В работе сделан обзор современного состояния гидромеханики составных струй. Впервые интерес к подобному струйному течению продемонстрирован в статье Херца и Херманруда [21]. В настоящей статье систематизированы следующие аспекты теории составных струй: 1. Гидродинамические модели, 2. Стационарное течение составной струи, 3. Неустойчивость струи к малым возмущениям (линейное приближение), 4. Неустойчивость к возмущениям конечной амплитуды (слабо нелинейное приближение), 5. Прямое численное моделирование распада струи, 6. Изгибная неустойчивость составной струи.

Stefan Radev. FLOW AND INSTABILITY OF LIQUID COMPOUND JETS

A review of the current state of the fluid mechanics of compound jets is presented. The mentioned jet configuration originates from the paper of Herz & Hermanrude [21], in which the first observations of the behaviour of the flow and instability of a compound jet were reported. The following aspects of the compound jet hydrodynamics are summarized in this review: (i) flow models, (ii) steady state flow, (iii) small disturbances instability of a compound jet — a linear approximation, (iv) propagation of finite amplitude perturbations — a weakly nonlinear approximation, (v) direct numerical simulation of the desintegration of a compound jet, (vi) asymmetrical instability in linear approximation.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучение гидродинамики двухслойных жидких струй вызвано разными причинами, но в конечном итоге все они направлены к усовершенствованию существующих капиллярно-струйных технологий и расширению их области применимости. Так, например, статья Hermanrud и Hertz [20] посвящена отысканию способов улучшения работы безинерционных струйных печатающих устройств путем введения сопла новой конструкции, предотвращающей его закупоривание пигментными частичками чернил. Как показано на рис. 1, цилиндрическое сопло, генерирующее первичную (основную) струю (ядро составной струи), расположено под свободной поверхностью второй (вторичной) несмешивающейся с ядром жидкостью, помещенной в соосном цилиндрическом контейнере. Увлекая эту жидкость, первичная струя формирует на своей поверхности коаксиальный слой определенной толщины.

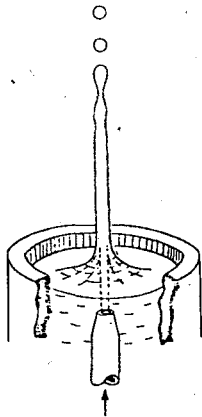


Рис. 1. Вариант сопла для генерирования двухслойной капиллярной струи (Hertz, Hermanrud [21])

Можно ожидать, что в соответствующих условиях этот слой будет существенно влиять на течение в ядре и с его помощью, как в работе Петрянова-Соколова и Шутова [6], пытаться управлять устойчивостью первичной струи.

Представляет также интерес рассмотрение составной струи как самостоятельной конфигурации капиллярно-струйного течения и изучение ее специфических характеристик с точки зрения гидродинамики, устойчивости, тепло-массообмена через ее межфазные границы и т. д. Можно, например, искать такие комбинации управляющих параметров, при которых составная струя распадается на капли, содержащие ядро из основной и оболочку из вторичной жидкости, что будет иметь место если внутренняя и внешняя межфазные поверхности смыкаются одновременно в некоторой точке оси струи (дробление струи как целое).

Чтобы иметь возможность решать поставленные выше задачи, для составной струи нужно записать соответствующие уравнения движения, граничные и начальные условия. Некоторые соображения о разумной общности подобной постановки целесообразно почерпнуть из эксперимента.

В экспериментах Hertz и Hermanrud [21] выявили три основных режима течения составной струи. Переход из одного режима в другой контролируется главным образом средней скоростью истечения струи. Первому режиму соответствует осесимметрическое течение с прямолинейной осью, которое сохраняет свой стационарный характер и на некотором удалении после выхода из сопла. В конце этого участка становятся видимыми регулярные чередующиеся утолщения и сужения поверхности струи, которые,

в конечном итоге, приводят к дроблению струи на капли. Как показал Рэлей [13], подобная картина движения однослойной струи обусловлена ее неустойчивостью (варикозной) к осесимметрическим возмущениям.

С возрастанием средней скорости истечения между стационарным участком и сечением дробления появляется участок, на котором теряется устойчивость прямолинейная ось струи. Это соответствует неустойчивости составной струи к поперечным возмущениям, которая является аналогом изгибной (синусоидальной) неустойчивости однослойной струи, исследованной Debye и Daen [19].

При последующем увеличении скорости истечения течение приобретает случайный турбулентноподобный характер. Этот режим выходит за рамки наших рассмотрений, оставаясь в то же время открытой задачей теории капиллярных струй.

Наиболее естественная постановка задачи для осесимметрического течения с прямолинейной осью получается в цилиндрической координатной системе Orz , в которой радиальная координата r отсчитывается от оси струи. Для наших дальнейших целей достаточно принять, что в некотором сечении струи $z = z_N$ (без ограничения общности можно положить $z_N = 0$) известны координаты межфазных поверхностей $h_j = H_j/N$ и профили аксиальной скорости $u_j = u_{jN}$. Удобнее всего эти предположения реализуются на выходе из сопла, изображенного на рис. 2, составленного из двух соосных цилиндрических трубок. Жидкости ядра и слоя будем считать несжимаемыми и, в общем случае, вязкими и несмешивающимися. Параметры относящиеся к течению в ядре будем снабжать нижним индексом $j = 1$, а для слоя $j = 2$. Если не оговорено противное, окружающее пространство ($j = 3$) считаем заполненным невязким газом плотностью ρ_3 и давлением p_3 . При сделанных предположениях уравнения движения ядра и слоя принимают вид

$$(1) \quad \rho_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial z} + v_j \frac{\partial u_j}{\partial r} \right) = \rho_j F_z - \frac{\partial p_j}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r p_{rz_j}) + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (p_{zz_j} + p_j) \right\},$$

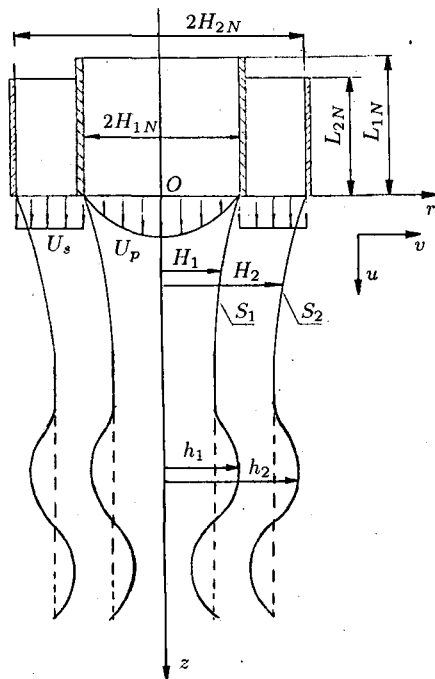


Рис. 2. Схема конфигурации составной струи

$$(2) \quad \rho_j \left\{ \frac{\partial v_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial v_j}{\partial z} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial r} \right\} \\ = -\frac{\partial p_j}{\partial r} + \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r} (p_{rrj} + p_j) + \frac{\partial p_{zzj}}{\partial z} \right] + \frac{2\rho_j}{\text{Re}_*} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_j}{\partial r} - \frac{v_j}{r^2} \right) \right\},$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial z} (ru_j) + \frac{\partial}{\partial r} (rv_j) = 0, \quad j = 1, 2,$$

где для компонент тензора напряжений имеем

$$(4) \quad p_{rrj} = -p_j + \left\{ \frac{2\mu_j}{\text{Re}_*} \frac{\partial v_j}{\partial z} \right\}, \quad p_{zz} = -p_j + \left\{ \frac{2\mu_j}{\text{Re}_*} \frac{\partial u_j}{\partial z} \right\}, \\ \frac{\text{Re}_*}{\mu_j} p_{rz} = \frac{\partial u_j}{\partial r} + \left\{ \frac{\partial v_j}{\partial z} \right\}.$$

Легко заметить, что (1)–(4) это уравнения Навье–Стокса, записанные в безразмерном виде при помощи некоторых характерных масштабов вязкости (μ_k), плотности (ρ_*), аксиальной скорости (U_*) и радиальной координаты (H_*), о которых будет сказано ниже. Через $\text{Re}_* = (\rho_* H_* U_* / \mu_*)$ обозначено число Рейнольдса, а массовая сила $F(O, F_z)$ введена для общности, с тем, чтобы иметь возможность при необходимости учесть влияние силы тяжести.

В фигурных скобках в уравнениях (1)–(4) заключены члены, которыми можно пренебречь, если воспользоваться приближением пограничного слоя. Применение этого приближения обосновано характерной структурой течения двухслойной струи: изменение гидродинамических величин вдоль по течению намного медленнее чем их изменение в поперечном (радиальном) направлении. Соответствующие оценки проводятся аналогично случаю однослойной струи (см. [16]).

Как обычно, в принятом приближении, давление поперек струи является постоянным (уравнение (2.В)). (Символ В введен внутри скобок, чтобы отличить полную запись соответствующего уравнения от его упрощенного в рамках приближения пограничного слоя вида.) Уравнения (1)–(4) нужно снабдить соответствующими условиями на оси течения и на межфазных поверхностях S_j .

На оси струи из-за симметрии течения в составной струе и, в частности, в центральном ядре, нужно потребовать

$$(5) \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = 0, \quad v_1 = 0 \quad (r = 0).$$

На межфазных поверхностях необходимо удовлетворить некоторые условия сопряжения гидродинамических величин, относящихся к разным областям течения. С физической точки зрения эти условия описывают взаимодействие между отдельными фазами и формально выводятся из законов сохранения массы и количества движения записанных по обе сто-

роны поверхности раздела. Обозначим через \vec{n}_1 внешнюю нормаль к поверхности ядра S_1 , а через \vec{n}_2 — внешнюю нормаль к поверхности составной струи S_2 , и пусть $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ соответствующие тангенциальные векторы. Для удобства введем обозначение $[a]_j^{j+1} = a_{j+1} - a_j$ для скачка величины a при переходе через межфазную поверхность S_j . Тогда из закона сохранения массы можно получить (подробнее см. [16])

$$(6) \quad \frac{\partial h_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial h_j}{\partial z} = v_j \quad \text{на } S_j, \quad j = 1, 2.$$

В таком виде (6) является условием непротекания и выражает отсутствие потока массы через межфазные поверхности S_j . На внутренней поверхности нужно также записать условие об отсутствии скольжения между фазами:

$$(7) \quad [\vec{w}_1 \cdot \vec{\tau}_1]_1^2 = 0,$$

где через \vec{w} обозначен вектор скорости течения.

Из векторного закона о сохранении количества движения мы получим еще два условия, сводящихся к балансу касательных и нормальных напряжений на межфазных границах с учетом сил поверхностного натяжения:

$$(8) \quad [\bar{p}_j \cdot \vec{n}_j]_j^{j+1} = -\frac{\sigma_{*j}}{R_{j*}},$$

где $\sigma_{*j} = T_j / (\rho_* H_* U_*^2)$ реципрочные числа Вебера, подсчитанные для каждой из межфазных поверхностей, T_j — соответствующие коэффициенты поверхностного натяжения, \bar{p}_j — тензор вязких напряжений, компоненты которого приведены в (4).

Средние радиусы кривизны R_j^* обеих поверхностей определяются выражениями

$$(9) \quad R_j^* = \left[1 + \left(\frac{\partial h_j}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ h_j^{-1} - \frac{\partial^2 h_j}{\partial z^2} \left[1 + \left(\frac{\partial h_j}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \right\}.$$

Для полной определенности, уравнения движения (1)–(4) нужно снабдить двумя дополнительными условиями, описывающими течение на выходе из насадка $z = 0$ и на конечном расстоянии $z = z_{\max}$ вниз по течению. Как правило, первое условие сводится к заданию профиля скорости истечения из насадка, в то время как второе условие вызывает некоторые трудности. Чаще всего оно записывается в виде „мягкого“ граничного условия на градиенты гидродинамических величин. Как будет видно ниже, при некоторых упрощенных постановках необходимость в нем отпадает.

Уравнения (1)–(9) достаточны для того, чтобы решать задачу об осесимметричном стационарном течении составной струи и исследовать развитие осесимметрических возмущений на ее поверхности и внутри нее,

вплоть до дробления на капли. Решение каждой из этих задач связано с целым рядом трудностей, часть из которых подобна трудностям, сопровождающим изучение однослойных жидких капиллярных струй: наличие неизвестной межфазной поверхности, неустойчивость течения и др. Здесь задача дополнительно усложняется присутствием двух неизвестных границ раздела, на которых нужно учитывать действие сил поверхностного натяжения. Кроме того, из-за двухслойности струи, значительно возрастает число безразмерных параметров, входящих в уравнения движения и граничные условия. Что касается задачи об изгибной неустойчивости струи, следствием которой является второй режим ее течения, то здесь ситуация еще более сложная из-за криволинейности оси. В общем случае ее можно решать в рамках полных уравнений движения, записанных ([7]) по отношению к осям естественного трехгранника оси струи. Для упрощенного решения их можно заменить квазиодномерными уравнениями, аналогичными предложенным Ентовым и Яриным [1] для однослойной струи. В любом случае речь может идти только о численном решении этих уравнений.

Из этого круга задач выделяется задача об изгибной неустойчивости составной струи к малым возмущениям. Из-за ее линейности она, как будет показано в § 9, допускает аналитическое решение. Исследование же изгибной неустойчивости двухслойной струи относительно возмущений конечной амплитуды остается открытой задачей.

2. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Как отмечено выше в общем случае, течение двухслойной струи является нестационарным и подчиняется нелинейным уравнениям движения (1)–(9). Один из способов упрощения анализа этих уравнений развит в линейной теории гидродинамической устойчивости, в которой течение расщепляется на невозмущенную (стационарную) часть и возмущенную (периодическую) составляющую:

$$(10) \quad h_j = H_j + \tilde{h}_j, \quad u_j = U_j + \tilde{u}_j, \quad p_j = P_j + \tilde{p}_j.$$

В данном параграфе рассматривается стационарное течение. Оно представляет также и определенный самостоятельный интерес, так как приблизительно соответствует некоторому участку струи вблизи выхода из насадка.

Математическая задача значительно упрощается, если уравнения движения записать в параболизированном варианте (1.В)–(9.В). В этих уравнениях дополнительно необходимо исключить нестационарные члены

$$(11) \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial h_j}{\partial t} = 0.$$

В [23] разработан пошаговый сквозной численный метод отыскания стационарного течения, в основе которого положен переход к переменным Мизеса (Ψ, z) с функцией тока Ψ в качестве независимой пространственной переменной. Перед тем как остановиться на некоторых из результатов, полученных этим методом, уточним набор безразмерных параметров.

Полагая что $H_* = H_{1N}$, $U_* = U_{1N}$, $\mu_* = \mu_1$, $\rho_* = \rho_1$, где H_{1N} — радиус сопла (см. рис. 2), U_{1N} — средняя скорость истечения ядра, безразмерные числа Рейнольдса Re и Вебера $We = \sigma_{*1}^{-1}$ будут отнесены к течению в ядре. В полный набор определяющих параметров нужно включить еще безразмерные отношения радиусов сопла $H_0 = H_{2N}/H_{1N}$, плотностей $\rho_0 = \rho_2/\rho_1$, вязкостей $\mu_0 = \mu_2/\mu_1$, поверхностных натяжений $\sigma_0 = \sigma_{*2}/\sigma_{*1} = T_2/T_1$, средних скоростей истечения $U_0 = U_{2N}/U_{1N}$. Профили аксиальной скорости в ядре и слое заданы, соответственно $U_p(r)$ и $U_s(r)$.

На рис. 3 и 4 показаны линии тока в ядре и коаксиальном слое, когда обе жидкости имеют одинаковые физические свойства, но разные средние скорости истечения. Отличие между этими случаями заключается в выборе профиля скорости истечения в ядре на выходе из насадка: на рис. 3 он параболический, на рис. 4 — плоский; профиль в слое всегда плоский. На этих рисунках хорошо прослеживается взаимодействие между течениями в ядре и в слое через внутреннюю межфазную границу. На рис. 3 воздействие внешнего слоя направлено в сторону ускорения близлежащих слоев ядра, в результате которого ядро начинает сужаться. Однако, после преодоления отставания поверхности ядра внешний слой начинает оказывать затормаживающее влияние на ядро (из-за меньшей средней скорости), что приводит к его расширению. На рис. 4 эффект торможения ядра внешним слоем проявляется сразу после выхода из насадка.

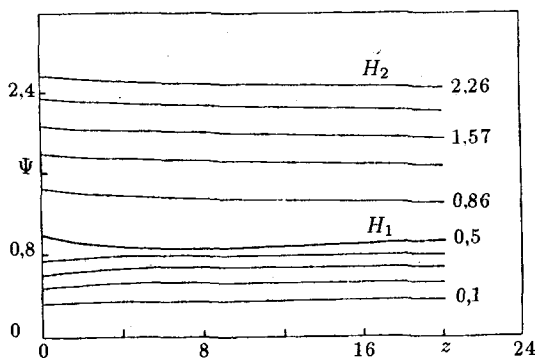


Рис. 3. Линии тока составной струи: начальный профиль скорости параболический-плоский; $Re = 160$; $We = 118,6$; $\rho_0 = 1$; $\sigma_0 = 1$, $\mu_0 = 1$, $H_0 = 2,56$, $U_0 = 0,64$

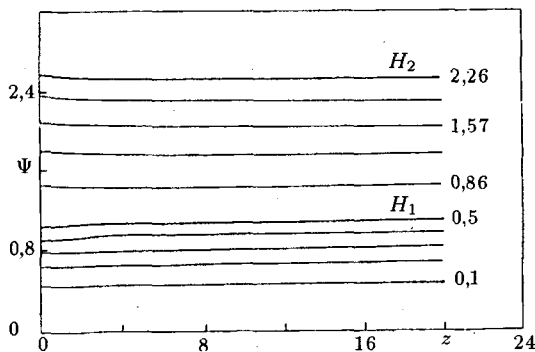


Рис. 4. Линии тока составной струи: начальный профиль — плоский-плоский; параметры как на рис. 3

На рис. 5 и 6 показаны соответствующие картины релаксации профиля аксиальной скорости вдоль течения, приводящей к его постепенному выравниванию.

Внешний вид поверхности составной струи (рис. 7) напоминает однослойную струю. Отметим, что рассматриваемые нами струи горизонтальны и их сужение вызвано перестройкой профиля скорости вдоль течения. При отсутствии силы тяжести релаксация скорости одновременно приводит к расширению ядра (за исключением, быть может, некоторого начального участка).

Перестройка течения двухслойной струи определяется, главным образом, силами вязкого взаимодействия между ядром и слоем. Подтверждением может служить рис. 8, где вязкость слоя в два раза меньше, чем на рис. 7. Поэтому полный радиус струи уменьшается быстрее, чем

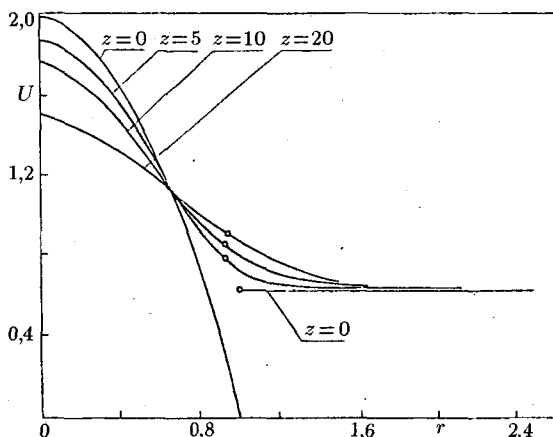


Рис. 5. Профили аксиальной скорости составной струи; параметры как на рис. 3. Кружочками отмечено положение межфазной границы

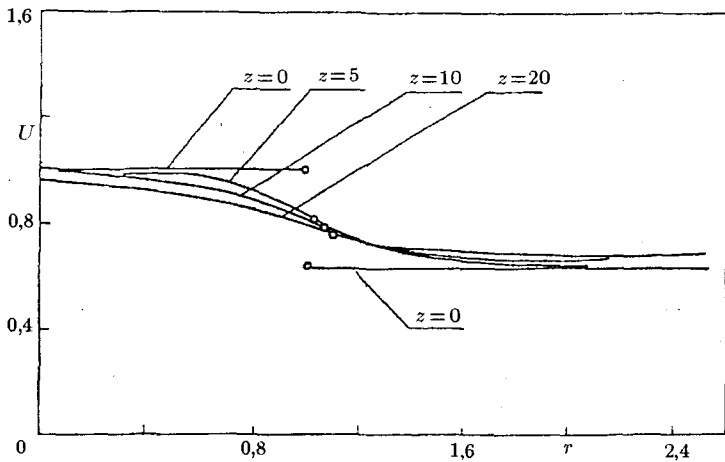


Рис. 6. Профили аксиальной скорости составной струи; параметры как на рис. 4. Кресточками отмечено положение межфазной границы

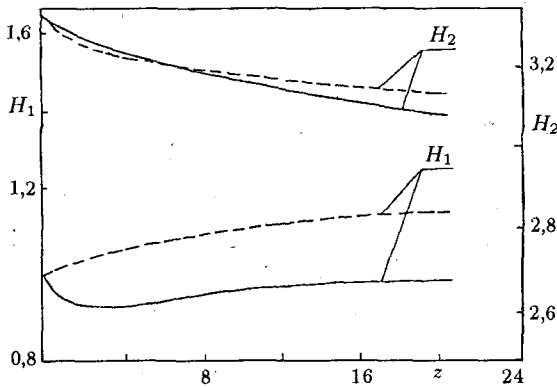


Рис. 7. Профили межфазных поверхностей — эффект скорости истечения ядра; $Re = 152$; $We = 47,3$; $\rho_0 = 1$, $\sigma_0 = 0,385$, $\mu_0 = 1$; $H_0 = 3,33$, $U_0 = 0,32$.

Начальный профиль скорости: ————— параболический-плоский, - - - - - плоский-плоский

на рис. 7, так как эффект ускорения слоя преобладает над замедлением ядра. При этом эффект поверхностных натяжений незначителен.

Заметим, что значения безразмерных параметров в [23] выбирались на основе экспериментальных данных, указанных Hertz и Nernangrud [21]. Численные расчеты находятся в хорошем качественном (для количественного нет данных) соответствии с визуализированными в последней работе течениями.

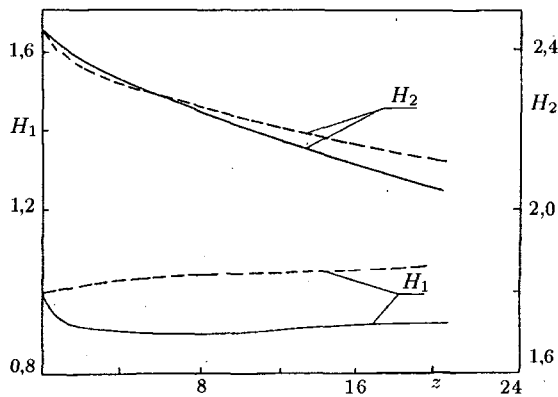


Рис. 8. Профили межфазных поверхностей — эффект безразмерного отношения вязкостей; $Re = 158$, $We = 118,6$; $\rho_0 = 1$, $\sigma_0 = 3,6$, $\mu_0 = 0,53$, $H_0 = 2,45$, $U_0 = 0,42$.
Начальный профиль скорости: ————— параболический-плоский, - - - - - плоский-плоский

3. РАЗВИТИЕ МАЛЫХ ВОЗМУШЕНИЙ В СОСТАВНОЙ СТРУЕ

Дробление составной струи на капли вызвано развитием возмущений с возрастающей вдоль течения амплитуды. Как правило, при помощи (10) возмущенное течение удастся разделить от осредненного (невозмущенного). Такой подход является особенно удобным, когда амплитуды возмущений малы.

Уравнения движения и граничные условия для возмущений составной струи получаются подстановкой (10) в (1)–(9), отождествляя невозмущенное течение с некоторым стационарным, например, найденным в § 2. Естественно считать, что в момент зарождения в потоке амплитуды возмущений являются малыми величинами, квадратичным произведениями которых можно пренебречь. Таким образом, приходим к линеаризованным уравнениям движения и граничным условиям для возмущений, что соответствует линейной постановке задачи об устойчивости заданного стационарного течения струи.

Для удобства введем функцию тока возмущенного течения:

$$(12) \quad \tilde{u}_j = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\Psi}_j), \quad \tilde{v}_j = -\frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial z} \quad (j = 1, 2).$$

Ввиду линейности задачи и ограничивая наше рассмотрение в рамках известного квазипараллельного приближения линейной теории устойчивости, функцию тока можно искать в виде бегущей волны:

$$(13) \quad \tilde{\Psi}_j = \Phi_j(r) \exp[i\alpha(z - ct)],$$

где Φ — амплитуда волны, α — волновой вектор, $c = c_r + ic_i$ — комплексная скорость распространения возмущений.

Как видно из (13), мы будем рассматривать возмущения, амплитуда которых возрастает если $c_i > 0$ (или убывает если $c_i < 0$) со временем. Если выполнить все указанные выше преобразования, для амплитуд волн получим

$$(14) \quad i\alpha \operatorname{Re} \left[(U_j - c)(L - \alpha^2)\Phi_j + \left(\frac{U_j'}{r} - U_j'' \right) \Phi_j \right] = \frac{\mu_j}{\rho_j} (L - \alpha^2)^2 \Phi_j \quad (j = 1, 2),$$

где $L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}$, а верхним штрихом обозначены производные по z .

Как и следовало ожидать, мы пришли к системе из двух уравнений Оппа-Зоммерфельда, для которой c является собственным числом, а Φ — собственной функцией. Линеаризацией полных граничных условий (5)–(10) получим соответствующие граничные условия:

$$(15) \quad \Phi_1 = \Phi_1'' = 0, \quad r = 0,$$

$$(16) \quad [\Phi]_1^2 = 0, \quad \left[\Phi' - \frac{U'\Phi}{U-c} \right]_1^2 = 0, \quad r = r_1,$$

$$(17) \quad \left[\frac{\mu}{\mu_1} (L + \alpha^2)\Phi - \frac{U''\Phi}{U-c} \right]_j^{j+1} = 0, \quad r = r_j,$$

$$(18) \quad (i\alpha \operatorname{Re})^{-1} \left[\frac{\mu}{\mu_1} \left\{ (L\Phi)' + \frac{1}{r} L\Phi - \alpha^2 \left(3\Phi' + \frac{\Phi}{r} \right) \right\} - \frac{\rho}{\rho_1} \left\{ (U-c) \left(\Phi' + \frac{\Phi}{r} - U'\Phi \right) \right\} \right]_j^{j+1} = -\frac{1}{\operatorname{We}} \frac{\sigma_j}{\sigma_1} \frac{(1 - \alpha^2 r_j^2)}{r_j^2 (U_j - c)}, \quad r = r_j,$$

где для краткости $r_j = H_j/H_1$; характерные масштабы такие же как в § 2.

По существу, задача о линейной неустойчивости составной струи свелась к отысканию собственных чисел и собственных функции системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка (14) с соответствующими краевыми условиями (15)–(18). Если основное течение струи выбрано достаточно близким к реальному, решение задачи с самого начала следует ориентировать к численным методам. Однако, при использовании некоторых предельных профилей скорости удается добиться аналитического решения, хотя и очень громоздкой формы.

Другой путь упрощения задачи о неустойчивости капиллярных струй — это переход к уравнениям движения погранслояного типа (1.В)–(10.В) с последующим их сведением к пространственно-одномерным. Для этого достаточно предположить, что аксиальная скорость и давление являются функциями только продольной координаты и времени, а из уравнения неразрывности исключить радиальную компоненту скорости. Обоснованием подобной замены реальных профилей плоскими может служить отмеченная в § 2 тенденция аксиальной скорости к сглаживанию и выравни-

ниванию. На основании этих рассуждений в [12] получены следующие одномерные нестационарные уравнения движения двухслойной струи:

$$(19) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \sigma_1 \left(h_1^{-2} \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial^3 h_1}{\partial z^3} \right) + \sigma_2 \rho_0 \left(h_2^{-2} \frac{\partial h_2}{\partial z} + \frac{\partial^3 h_2}{\partial z^3} \right),$$

$$(20) \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = \sigma_2 \left(h_2^{-2} \frac{\partial h_2}{\partial z} + \frac{\partial^3 h_2}{\partial z^3} \right),$$

$$(21) \quad \frac{\partial G_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (u_j G_j) = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$(22) \quad G_1 = h_1^2, \quad G_2 = h_2^2 - h_1^2,$$

где G_1 , G_2 имеют смысл площадей поперечных сечений ядра и коаксиального слоя. При выводе уравнений (19)–(20) в качестве характерных масштабов приняты $H_* = H_{2N}$, $U_* = U_{1N}$, $\rho_* = \rho_1$ и следующие связи между новыми и старыми (§ 2) безразмерными параметрами: $\delta = H_0^{-1}$, $\sigma_1 = \delta/We$, $\sigma_2 = \sigma_0 \sigma_1 / \rho_0$, при этом ρ_0 и U_0 сохранены без изменений.

Очевидно, уравнения движения (19) и (20) соответствуют струе, составленной из невязких жидкостей. (Их можно было получить непосредственно из уравнений Эйлера в цилиндрических координатах.) Они являются обобщением одномерных уравнений Шкадова [15] и Lee [22], предложенных для однослойного струйного течения.

Уравнения (19)–(22) допускают простое стационарное решение:

$$(23) \quad u_1 = U_1, \quad u_2 = U_2, \quad h_1 = H_1, \quad h_2 = H_2,$$

и конкретно

$$(24) \quad U_1 = 1, \quad U_2 = U_0, \quad H_1 = \delta, \quad H_2 = 1,$$

отличающееся постоянными толщинами и равномерными скоростями ядра и слоя. Найденное течение имеет характер предельного, реализующегося на достаточном удалении от насадка. Часто оно используется как основное для анализа неустойчивости струи.

Если устойчивость предельного течения (23)–(24) исследовать в рамках одномерных уравнений (19)–(22), повторяя проделанную выше линеаризацию и отыскивая решения в виде экспонент (13), после исключения неизвестных амплитуд получим дисперсионное соотношение в аналитическом виде:

$$(25) \quad (1-c)^2 (U_0 - c)^2 + \frac{1}{2} \sigma_2 (1 - \delta^2) (1 - \alpha^2) (1 - c^2) + \left[\frac{\sigma_1}{2} \delta^{-1} (1 - \alpha^2 \delta^2) + \frac{\sigma_2 \rho_2}{2 \rho_1} \delta^2 (1 - \alpha^2) \right] (U_0 - c)^2 + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4} \delta^{-1} (1 - \alpha^2 \delta^2) (1 - \alpha^2) (1 - \delta^2) = 0.$$

Соотношение (25) записано в виде алгебраического уравнения четвертой степени, решения которого определяют зависимость комплексной скорости распространения s (в частности коэффициента усиления α_i) от волнового числа.

Вышеприведенный вид дисперсионного соотношения одномерного анализа получен Радевым и Шкадовым [12]. Частный случай однородного профиля скорости во всей струе ($U_0 = 1$), когда уравнение (25) сводится к биквадратному, рассмотрен в [1].

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ

Аналитичность дисперсионного соотношения (25) обусловлена максимально упрощенным видом стационарного течения (23)–(24), отражающего предельный характер последнего, а алгебраичность — одномерностью уравнений движения. Однако, основные качественные особенности распространения малых возмущений в составной струе можно исследовать уже на основании (25).

Остановимся на некоторых асимптотических решениях (25), полученных в [12] и [26] в предположении $\rho_0 = 1$, $U_0 = 1$ (струя однородная по составу и по скорости). Решения (биквадратного) уравнения (25) выписываются в виде

$$(26) \quad s_{1,2} = \frac{1}{4} \left\{ -A \pm [A^2 - 4\sigma_1\sigma_2\delta^{-1}(1-\alpha^2)(1-\delta^2\alpha^2)(1-\delta^2)]^{1/2} \right\},$$

где $s = (1-c)^2$ и для краткости $A \equiv \sigma_2(1-\alpha^2) + \sigma_1\delta^{-1}(1-\delta^2\alpha^2)$. Очевидно, корни уравнения (26) всегда вещественны. С физической точки зрения это означает, что возмущения распространяются со средней скоростью струи. С точки зрения растущих возмущений интересны отрицательные корни (26). Следовательно длинноволновому диапазону волновых чисел соответствуют два семейства волн с растущей ($0 < \alpha < 1$) амплитудой, а коротковолновому, $1 < \alpha < \delta^{-1}$ — только одно семейство.

Асимптотический анализ решений (26) начнем со случая $\sigma_1 = \varepsilon_1 \rightarrow 0$, что при остальных фиксированных безразмерных параметрах соответствует малым значениям коэффициента поверхностного натяжения T_1 на внутренней межфазной границе.

Раскладывая решения (26) в ряд по степеням ε_1 , для коэффициентов усиления $(\alpha_i)_1$, $(\alpha_i)_2$ с точностью до членов порядка ε_1 получим

$$(27) \quad (\alpha_i)_1 = \alpha \left[\frac{1}{2}\varepsilon_1\delta^{-1}(1-\delta^2)(1-\delta^2\alpha^2) \right]^{1/2}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$(28) \quad (\alpha_i)_2 = \begin{cases} \alpha \left[\frac{1}{2}\sigma_2(1-\alpha^2) + \frac{1}{2}\varepsilon_1\delta(1-\alpha^2\delta^2) \right]^{1/2}, & 0 < \alpha < 1, \\ (\alpha_i)_1, & 1 < \alpha < \delta^{-1}. \end{cases}$$

Сравнивая, можно заметить, что второе семейство волн обладает большим коэффициентом усиления. Кроме того, главный член разложения коэффициента усиления второго семейства совпадает с коэффициентом усиления составной струи, полностью однородной. Строго говоря, полная однородность имела бы место, если $\epsilon_1 = 0$. Интересно отметить, что как только ϵ_1 становится отличным от нуля, в течении наряду с основной модой полностью однородной струи в длинноволновом диапазоне появляется вторая мода (27), отражающая неустойчивость внутренней межфазной поверхности. Влияние этой неустойчивости распространяется и на коротковолновый диапазон, где оно является определяющим.

Подобным образом можно исследовать случай $\sigma_2 = \epsilon_2 \rightarrow 0$. Соответствующие разложения имеют вид

$$(29) \quad (\alpha c_i)_1 = \alpha \left[\frac{1}{2} \epsilon_2 (1 - \delta^2) (1 - \alpha^2) \right]^{1/2}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$(30) \quad (\alpha c_i)_2 = \alpha \left[\frac{1}{2} \sigma_1 \delta^{-1} (1 - \delta^2 \alpha^2) + \frac{1}{2} \epsilon_2 \delta^2 (1 - \alpha^2) \right], \quad 0 < \alpha < \delta^{-1}.$$

В главном члене $(\alpha c_i)_2$ из (30) легко узнать коэффициент усиления для течения в ядре, рассматриваемом как изолированная однослойная струя с безразмерным радиусом δ и безразмерным коэффициентом поверхностного натяжения σ_1 .

Третий предельный случай, представляющий интерес, это случай малых толщин концентрического слоя: $1 - \delta = \epsilon_3 \rightarrow 0$. Соответствующие асимптотические разложения имеют вид

$$(31) \quad (\alpha c_i)_1 = \alpha \left[\epsilon_3 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} (1 - \alpha^2) \right]^{1/2},$$

$$(32) \quad (\alpha c_i)_2 = \alpha \left[\frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) (1 - \alpha^2) - \epsilon_3 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} (1 - \alpha^2) + \epsilon_3 \frac{\sigma_1}{2} (1 + \alpha^2) \right]^{1/2}.$$

Главный член коэффициента усиления второго семейства волн по форме соответствует однослойной струе. В то же время, коэффициент поверхностного натяжения в этой формуле равняется сумме коэффициентов натяжений обеих межфазных поверхностей. Отсюда следует, что создавая слой на поверхности, можно до определенной степени управлять развитием ее неустойчивости.

Из-за наличия двух межфазных поверхностей, специальное внимание нужно уделить вопросу о формах потери устойчивости и длине нераспавшегося участка составной струи. Каждому коэффициенту усиления можно сопоставить длины L_j , при которых сомкнулась бы j -тая межфазная поверхность, рассматриваемая как независимая при заданных начальных амплитудах возмущений h_{j0} . (Заметим, что так как эти амплитуды не независимы, достаточно задать, например, h_{20} .)

Тогда имеем

$$(33) \quad L_j^{(k)} = \frac{1}{q_k} \ln \left(\frac{H_j}{\delta_j} \right), \quad k = 1, 2, j = 1, 2,$$

где $\delta_j = |h_{j0}|H_1$, $q_k = (\alpha c_i)_k$.

Однако этих двух длин недостаточно, если требуется определить положение сечения, в котором происходит разрушение первоначальной конфигурации составной струи. Необходимо дополнительно предусмотреть возможность соприкосновения межфазных поверхностей на некотором расстоянии от оси струи, которая подсказывается неравенством $L_2^{(k)} < L_1^{(k)}$. Длина $L_c^{(k)}$, на которой может произойти соприкосновение, определяется аналогично (33):

$$(34) \quad L_c^{(k)} = \frac{1}{q_k} \ln \left(\frac{H_2 - H_1}{\delta_2 - \delta_1} \right).$$

Коэффициенты q_k в (33) и (34) необходимо заменить максимальным значением q_* , которое по определению принадлежит второму семейству волн, имеющему всегда (срв. (26) больший коэффициент усиления, чем первое семейство (что позволяет опустить индекс k). Окончательно равенство

$$(35) \quad L = \min(L_1, L_c), \quad q = q_* = \max_{\alpha} (\alpha c_i)_2$$

определяет то расстояние от насадка, на котором сохраняется первоначальная конфигурация составной струи.

Рассмотрим характерные примеры разрушения конфигурации составной струи, для наглядности изображенные на рис. 9. Распад типа (а) соответствует, например, случаю почти однородной составной струи (27), (28); типа (с) — случаю составной струи с пренебрежимым внешним поверхностным натяжением. Эти формы распада наблюдались (Hertz и Neumann [21]) в экспериментах. Условия, при которых имеет место разрушение струи типа (b), будут указанные в § 6.

Полный качественный анализ дисперсионного соотношения одномерного анализа (25) приведен в [2].

Аналитичность дисперсионного соотношения составной струи сохранится, если одномерные уравнения движения заменить полными уравнениями Эйлера, записанными в цилиндрических координатах. Шутовым [17] в невязкой постановке получено дисперсионное соотношение для струи с покоящимися невозмущенными жидкостями. В [4] оно приведено для общего случая предельного течения (23), (24). При отсутствии скачка невозмущенной скорости ($U_0 = 1$) оно снова сводится к биквадратному уравнению, но с коэффициентами, содержащими модифицированные функции Бесселя (I) и Кельвина (K) нулевого и первого порядка:

$$(36) \quad \alpha^2 I_A s^4 + \alpha [\sigma_2 I_B (\alpha^2 - 1) + \sigma_1 \delta^{-2} (\alpha^2 \delta^2 - 1) I_C] s^2 + \sigma_1 \sigma_2 \delta^{-2} (\alpha^2 - 1) (\alpha^2 \delta^2 - 1) I_D = 0,$$

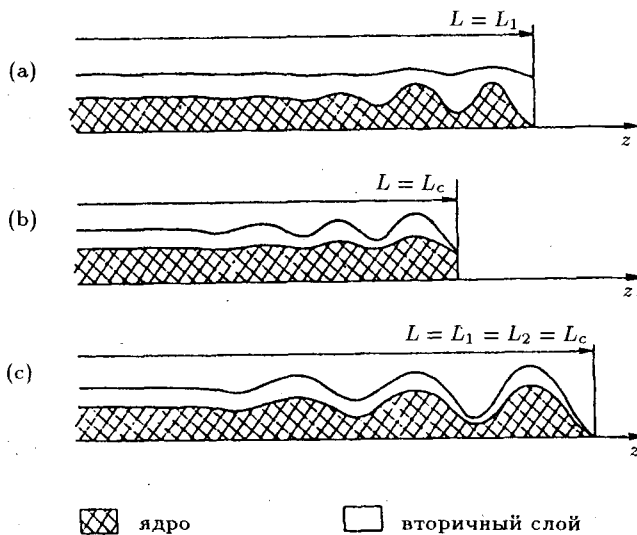


Рис. 9. Типичные формы распада конфигурации составной струи:
 (а) дробление ядра на капли, увлекаемые жидкостью слоя, сохраняющего свою сплошность;
 (б) соприкосновение межфазных поверхностей;
 (с) дробление составной струи как целое.
 Обе межфазные поверхности смыкаются одновременно в одной и той же точке оси струи

где

$$\begin{aligned}
 (37) \quad I_A &\equiv I_A(\alpha, \delta, \rho) = \rho I_1(\alpha\delta)[I_0(\alpha\delta)K_0(\alpha) - I_0(\alpha)K_0(\alpha\delta)] \\
 &\quad - I_0(\alpha\delta)[I_1(\alpha\delta)K_0(\alpha) + I_0(\alpha)K_1(\alpha\delta)], \\
 I_B &\equiv I_B(\alpha, \delta, \rho) = \rho I_1(\alpha\delta)[I_1(\alpha)K_0(\alpha\delta) + I_0(\alpha\delta)K_1(\alpha)] \\
 &\quad + I_0(\alpha\delta)[I_1(\alpha)K_1(\alpha\delta) - I_1(\alpha\delta)K_1(\alpha)], \\
 I_C &\equiv I_C(\alpha, \delta) = I_1(\alpha\delta)[I_1(\alpha\delta)K_0(\alpha) + I_0(\alpha)K_1(\alpha\delta)], \\
 I_D &\equiv I_D(\alpha, \delta) = I_1(\alpha\delta)[I_1(\alpha\delta)K_1(\alpha) - K_1(\alpha\delta)I_1(\alpha)].
 \end{aligned}$$

Выводы сделанные выше для устойчивости струи на основе дисперсионного соотношения одномерного анализа (25) практически без изменений переносятся на общее уравнение (36), (37). Это не случайно. В [3] показано, что упрощенное уравнение (25) эквивалентно длинноволновой асимптотике, $\alpha < 1$, полного соотношения (35), (36). Подобный факт имеет место и для однослойных струй. Этим объясняется качественное совпадение дисперсионных кривых, полученных в [4] при помощи упрощенного (25) и полного (35), (36) уравнений. Кроме того, с хорошей точностью уравнение (25) может применяться и для численных расчетов неустойчивости невязкой составной струи. Возвращаясь назад к выводу одномерных уравнений движения (19)–(22) составной струи, заметим, что при их выводе неявно подразумевалась „тонкость“ струи. Другими

словами, их применимость оправдана для струйных течений, для которых характерная длина волны возмущений много больше радиуса струи.

Интерес представляет и коротковолновая асимптотика ($\alpha \gg 1$) полного невязкого соотношения (36), (37), полученная в [3]:

$$(38) \quad q^2 = \left[\alpha \frac{\sigma_1}{\delta^2} (1 - \alpha^2 \delta^2) + \alpha^2 \frac{\rho_0}{1 + \rho_0} U_{12}^2 \right] \frac{1}{1 + \rho_0},$$

где $U_{12} = 1 - U_0$ — скачок невозмущенной скорости. Для скорости распространения c_r неустойчивых возмущений получаем

$$(39) \quad c_r = \frac{1 + \rho_0 U_0}{1 + \rho_0},$$

которая не зависит от волнового числа поверхностных натяжений и толщины слоя.

В правой части (38) отсутствуют члены, содержащие σ_2 , т. е. в диапазоне очень коротких волн внешняя поверхность не оказывает влияние на устойчивость течения. Это объясняется тем, что при $\alpha \gg 1$ внешняя поверхность нейтрально устойчива.

Если $\sigma_1 = 0$, то согласно (38) коэффициент усиления обусловлен только скачком скорости. Очевидно, в этом случае в чистом виде имеет место неустойчивость Кельвина-Гемгольца из-за разрыва скорости на внутренней межфазной поверхности составной струи, что подтверждается и формулой (39) для скорости распространения.

Включение в (38) эффекта внутреннего поверхностного натяжения оказывает стабилизирующее воздействие на неустойчивость струи, так как при $\alpha \gg 1$ первое слагаемое, содержащие σ_1 , отрицательно.

Для полноты, проведем исследование правой части (38). Определим волновое число α_0 , при котором обрывается неустойчивый диапазон полного дисперсионного соотношения, где $q(\alpha_0) = 0$. Решая квадратное уравнение для α_0 , получим

$$(40) \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \left[G_0 + \left(G_0^2 + \frac{4}{\delta^2} \right)^{1/2} \right], \quad G_0 = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0} \frac{U_{12}^2}{\sigma_1}, \quad \alpha_0 \gg 1.$$

Как видно из (40), чем меньше σ_1 , тем меньше стабилизирующий эффект внутренней межфазной границы и тем дальше в сторону очень коротких волн передвигается неустойчивый диапазон. Подобный эффект имеет место при уменьшении толщины ядра, включительно и при отсутствии скачка скорости.

Дисперсионное соотношение составной струи из покоящихся вязких жидкостей получено Петряновым — Соколовым и Шутовым [6], а в более детальном виде представлено Шутовым [17]. В более общем виде это соотношение получено в [5] для составной струи из равномерно движущихся жидкостей. Решающим обстоятельством для успеха всех этих работ является то, что уравнения Орра-Зоммерфельда (14) для предельных профилей струи переходят в уравнения с постоянными коэффициентами и их

решение выражается линейной комбинацией из модифицированных функций Бесселя и Кельвина. Дисперсионное соотношение выписанное в [17] имеет очень громоздкий вид и записывается при помощи определителя размерности (6×6) . С точки зрения численного анализа, более предпочтительным представляется прямое численное интегрирование уравнений Орра-Зоммерфельда, нежели численное отыскание корней детерминантного уравнения, элементы которого выражаются функциями Бесселя и их производных. Однако, некоторые асимптотические результаты, как показано в [17], удается записать в довольно простой форме, если дополнительно ограничиться безинерционным приближением уравнений Орра-Зоммерфельда. Речь идет об асимптотике типа (31), (32) ($\Delta = 1 - \delta = \varepsilon_3 \rightarrow 0$), при помощи которой можно исследовать влияние достаточно тонкой оболочки на неустойчивость ядра, например, с целью ее управления. Рассмотрим наиболее интересные случаи вязкой оболочки взаимодействующей с невязким или вязким ядром. Первому случаю соответствует дисперсионное соотношение, которое в длинноволновом приближении дополнительно упрощается к виду

$$(41) \quad q^2 + q \frac{3}{2} \frac{\Delta}{\text{Re}_2} \alpha^2 + \frac{1 + \sigma_0}{2\text{We}} (\alpha^2 - 1) \alpha^2 = 0,$$

где число Рейнольдса отнесено к вязкости оболочки. Остальные характерные масштабы оставлены такими же как в § 2.

Максимальный коэффициент усиления принадлежит длинноволновому диапазону

$$(42) \quad \alpha_*^{-2} = 2 + \left[\frac{9\text{We}\Delta}{2(1 + \sigma_0)\text{Re}^2} \right]^{1/2} \equiv 2 + \xi^{-1/2}$$

и равняется

$$(43) \quad q_* = \frac{(1 + \sigma_0)\text{Re}}{3\text{We}\Delta}.$$

Заметим, что (42), (43) имеют место одновременно с неравенством, определяющим применимость безинерционного приближения для вязкой оболочки:

$$(44) \quad \xi \ll 1.$$

Хорошо видно, что подходящим выбором вязкости и толщины оболочки можно существенным образом подавить неустойчивость струи.

Во втором случае вязкая оболочка взаимодействует с вязким ядром. Ее влияние существенно и направлено на стабилизацию струи если $(\mu_0\Delta)^{-1} = \varepsilon < 1$. Тогда для максимального коэффициента усиления с точностью до главных членов по μ_0^{-1} и Δ имеем значение

$$(45) \quad q_* = \frac{(1 + \sigma_0)\text{Re}}{3\mu_0\text{We}\Delta} \frac{(1 - \sqrt{3\varepsilon})(1 + \Delta + \sqrt{\varepsilon/3}) - 2\Delta\sigma_0/(1 + \sigma_0)}{1 + 4\sqrt{\varepsilon/3}},$$

которое достигается при $\alpha_* = (3/\mu_0\Delta)^{1/4}$.

5. МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ СТРУЙНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Идея метода дифференциальной прогонки (см. [27], [18]) состоит в переходе от краевой задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда к двум начальным задачам Коши, записанным на концах интеграционного интервала, которые затем сшиваются в некоторой его внутренней точке. С точки зрения численного определения собственных чисел уравнения Орра-Зоммерфельда этот метод имеет ряд преимуществ, так как позволяет обойти процедуру пристрелки и заменить осцилирующие решения исходной задачи монотонными, плавно меняющимися функциями. Для капиллярно-струйных течений метод дифференциальной прогонки развит в [24] (для однослойных) и в [25] (для двухслойных струй).

Для удобства, задачу (14)–(18) перепишем в виде системы из обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(46) \quad \vec{v}_j' = M_j \cdot \vec{v}_j, \quad M_j = \begin{vmatrix} -1/r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/r & 0 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m_j & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad m_j = \alpha^2 + i\alpha \operatorname{Re} \frac{\rho_j}{\mu_j} (1-c),$$

с соответствующими краевыми условиями

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1^{(1)} = v_1^{(2)} = 0, \quad r = 0, \\ v_1^{(1)} = v_2^{(1)}, \quad v_1^{(3)} = v_2^{(3)}, \quad r = r_1, \\ [\mu(v^{(2)} + 2\alpha^2 v^{(1)})]_j^{j+1} = 0, \quad r = r_j, \\ (i\alpha \operatorname{Re})^{-1} \left[\frac{\mu}{\mu_1} \left\{ v^{(4)} - 2\alpha^2 \left(v^{(3)} - \frac{1}{r} v^{(1)} \right) \right\} \right]_j^{j+1} - (1-c) \left[\frac{\rho}{\rho_1} v^{(3)} \right]_j^{j+1} \\ = \frac{S_j}{1-c} v_j^{(1)}, \quad r = r_j, \quad S_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_1} \frac{1 - \alpha^2 r_j^2}{\operatorname{We} r_j^2}, \end{array} \right.$$

при помощи новых искомым функций $v_j = (v_j^{(1)}, v_j^{(2)}, v_j^{(3)}, v_j^{(4)})$:

$$(48) \quad v_j^{(1)} = \Phi_j, \quad v_j^{(2)} = (L' - \alpha^2)\Phi_j, \quad v_j^{(3)} = \frac{1}{r} (rv_j^{(1)})', \quad v_j^{(4)} = \frac{1}{r} (rv_j^{(2)})'$$

Ради простоты, в исходной задаче (14)–(18) невозмущенное стационарное течение заменено его предельной конфигурацией (23), где

$$(49) \quad U_1 = U_2 = 1, \quad H_j = r_j, \quad r_1 = 1.$$

Общий случай рассмотрен Чавдаровым [14], где приведены и некоторые численные результаты.

От \vec{v}_1 потребуем выполнения краевых условий, относящихся к оси струи, от \vec{v}_2 — к внешней межфазной границе. Этим на обоих концах интеграционного интервала определяются два подмножества решений системы (46), (47), а именно:

$$(50) \quad \left. \begin{aligned} v_1^{(1)} &= a_1(r)v_1^{(3)} + a_2(r)v_1^{(4)} \\ v_1^{(2)} &= a_3(r)v_1^{(3)} + a_4(r)v_1^{(4)} \end{aligned} \right\}, \quad r \in [0, r_1],$$

и

$$(51) \quad \left. \begin{aligned} v_2^{(1)} &= b_1(r)v_2^{(2)} + b_2(r)v_2^{(4)} \\ v_2^{(3)} &= b_3(r)v_2^{(2)} + b_4(r)v_2^{(4)} \end{aligned} \right\}, \quad r \in [r_1, r_2],$$

где $a_k(r)$, $b_k(r)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) новые искомые функции.

После подстановки соотношений (50) и (51) в систему (46) и в соответствующие краевые условия, наложенные им по определению, для функции a_k получим уравнения

$$(52) \quad \left. \begin{aligned} a_1' &= 1 - a_1/r - \alpha^2 a_1^2 - a_3(a_1 + m_1 a_2) \\ a_2' &= -a_2/r - \alpha^2 a_1 a_2 - a_4(a_1 + m_1 a_2) \\ a_3' &= -a_3/r - \alpha^2 a_1 a_3 - a_3(a_3 + m_1 a_4) \\ a_4' &= 1 - a_4/r - \alpha^2 a_2 a_3 - a_4(a_3 + m_1 a_4) \end{aligned} \right\}, \quad r \in [0, 1],$$

с начальными условиями на $r = 0$

$$(53) \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$

а для b_k

$$(54) \quad \left. \begin{aligned} b_1' &= -m_2 b_2 + b_3 \\ b_2' &= -b_1 - b_2/r + b_4 \\ b_3' &= 1 + \alpha^2 b_1 + b_3/r - m_2 b_4 \\ b_4' &= \alpha^2 b_2 - b_3 \end{aligned} \right\}, \quad r \in [r_1, r_2],$$

с условиями на $r = r_2$

$$(55) \quad \begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{2\alpha^2}, \\ b_2 &= b_1 b_3 \left\{ \frac{2\alpha^2}{r} - i\alpha \operatorname{Re} \frac{S_2}{\mu_0(1-c)} \right\}, \\ b_3 &= \left\{ 2\alpha^2 + i\alpha \operatorname{Re} \frac{\rho_0}{\mu_0}(1-c) \right\}^{-1}, \\ b_4 &= 0. \end{aligned}$$

При помощи (52)–(55) решение исходной задачи (46), (47) сводит-ся к интегрированию двух отделяющихся систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для каждой из которых записано необходимое число начальных условий. Решения обеих систем необходимо

сшить при помощи краевых условий на внутренней границе $r = r_1$, что приводит к следующему соотношению между компонентами вектора

$$\vec{u} = \left(v_1^{(3)}, v_1^{(4)}, v_2^{(3)}, v_2^{(4)} \right)^T:$$

$$(56) \quad K \cdot \vec{u} = 0, \quad r = r_1,$$

$$K = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -b_1 & -b_2 \\ 1 & 0 & -b_3 & -b_4 \\ a_3 & a_4 & (k_3 b_1 - \mu_0) & k_3 b_2 \\ -k_1 & 1 & (k_4 b_1 + k_2 b_3) & (k_4 b_2 + k_2 b_4 - \mu_0) \end{vmatrix},$$

где

$$(57) \quad k_j = \frac{\mu_j}{\mu_1} (\alpha^2 + m_j), \quad j = 1, 2,$$

$$k_3 = 2\alpha^2 (1 - \mu_0),$$

$$k_4 = 2\alpha^2 (1 - \mu_0) - i\alpha \operatorname{Re} \frac{S_1}{1 - c}.$$

Равенство нулю определителя K является условием существования нетривиального решения для исходной спектральной задачи для системы уравнения Орра-Зоммерфельда. По существу $K = 0$ — дисперсионное соотношение задачи, элементы которого находятся численным интегрированием, а решения — итерациями по собственному числу c .

6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СОСТАВНОЙ СТРУИ

Ниже представлены некоторые выводы и численные расчеты из [25]; они дополняют § 4 и углубляют наши представления о неустойчивости составной струи.

На рис. 10 коэффициент усиления q показан как функция волнового числа α . Типичные дисперсионные кривые $q - \alpha$ для составной струи отмечены номерами 3 и 3^a. Они соответствуют уже известным нам двум семействам (модам) возмущений с возрастающими амплитудами сосуществующих одновременно в длинноволновом диапазоне $\alpha < 1/r_2$. В интервале $1/r_2 < \alpha < 1$ неустойчивость струи связана только с продолжением кривой 3 из длинноволнового в коротковолновой диапазон. Кривые этих семейств проходят через максимум; в рассматриваемом случае оба типа возмущений распространяются с невозмущенной (средней) скоростью жидкости.

Уже отмечали, что существование этих семейств обусловлено одновременным присутствием внутри течения двух межфазных поверхностей с ненулевыми поверхностными натяжениями. Действительно, как только одно из натяжений становится равным нулю, составная струя с точки

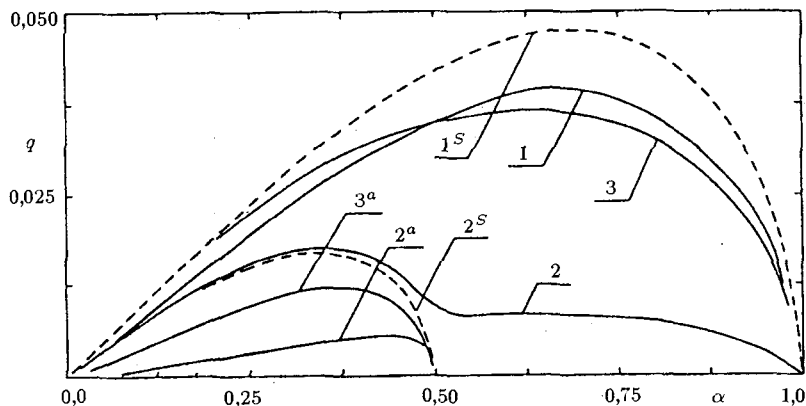


Рис. 10. Коэффициент усиления составной струи:
 — двухслойные струи с $Re = 500$, $\rho_0 = \mu_0 = 1$ и $r_2 = 2$; 1 — $We = 50$, $\sigma_0 = 0$; 2, 2^a — $We = 500$, $\sigma_0 = 10$; 3, 3^a — $We = 50$, $\sigma_0 = 1$;
 - - - - - однослойные струи с $Re = 500$ и $We = 50$ и радиусами 1^S — $r = r_1$; 2^S — $r = r_2$

зрения ее неустойчивости ведет себя как однослойная. Например, если $1/\sigma_0 = 0$, дисперсионная кривая 2^S соответствует однослойной струе радиуса r_2 (срв. с (28)). При возрастании внутреннего поверхностного натяжения с нуля (кривая 2^S) до некоторого конечного значения, новое семейство (кривая 2^a) неустойчивых возмущений возникает в области длинных волн и, одновременно, прежнее семейство (кривая 2) расширяет свой неустойчивый диапазон вплоть до коротковолнового ($\alpha < 1$). И во втором предельном случае, $\sigma_0 = 0$, остается только одна неустойчивая мода (кривая 1). Однако в отличие от невязкого случая (30), она расположена ниже кривой 1^S, рассчитанной для ядра, рассматриваемого как изолированную однослойную струю. Подтверждается вывод асимптотического анализа § 4, что вязкая оболочка подавляет неустойчивость ядра.

С точки зрения наиболее быстрорастущих возмущений, достаточно ограничиться модой с более широким диапазоном существования, так как она характеризуется наибольшим коэффициентом усиления. (В § 4 она обозначалась как второй.)

Остановимся на некоторых эффектах на неустойчивость струи, имеющих место при варировании ее безразмерных параметров. Можно ожидать, что наиболее существенным будет эффект внешнего поверхностного натяжения. Его дифференцированное влияние на коэффициент усиления иллюстрируется на рис. 11. В длинноволновом диапазоне коэффициент усиления монотонно возрастает вместе с σ_0 , в то время как в коротковолновом диапазоне наблюдается противоположная тенденция. Другими словами, нарастание поверхностного натяжения оболочки стабилизирует коротковолновую и дестабилизирует длинноволновые диапазоны. При

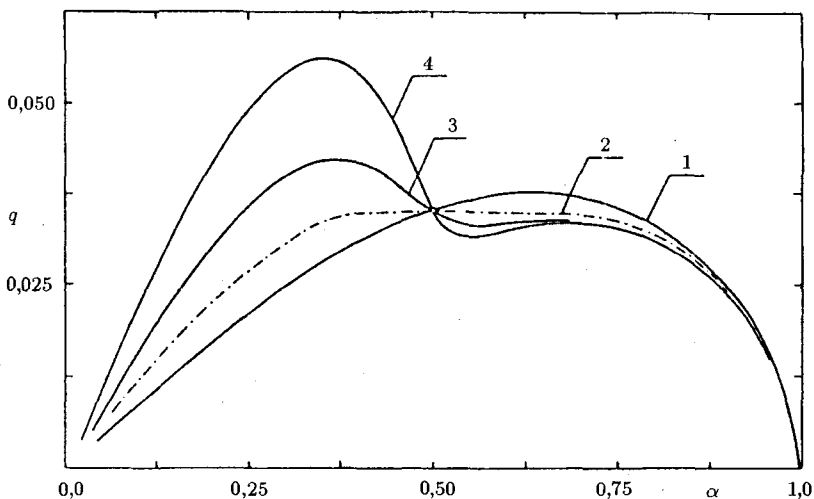


Рис. 11. Эффект внешнего поверхностного натяжения на коэффициент усиления ($Re = 500$, $We = 50$, $r_2 = 2$, $\rho_0 = \mu_0 = 1$): 1 — $\sigma_0 = 0,5$; 2 — $\sigma_0 = \sigma_{op} = 2,267$; 3 — $\sigma_0 = 5$; 4 — $\sigma_0 = 10$

этом длина волны наиболее „опасного“ возмущения сдвигается из области коротких в сторону длинных волн. На дисперсионной кривой 2 максимальный коэффициент усиления q_* достигает свой минимум $q_{op} = 0,0335$ в точке $\alpha_{op} = 1/r_2$ при $\sigma_0 = \sigma_{op} = 2,267$ и фиксированных остальных параметрах. Если $\sigma_0 > \sigma_{op}$, на кривых $q - \alpha$ видны два локальных максимума (срв. кривые 3, 4), но больший из них q_* расположен в длинноволновом интервале. Если суммировать результаты на рис. 10 и 11, приходим к следующему качественному выводу: капиллярная неустойчивость составной струи в длинноволновом диапазоне контролируется главным образом поверхностным натяжением оболочки, а в коротковолновом — поверхностным натяжением ядра.

Если принять $\rho_0 \neq 1$, можно исследовать эффект плотности оболочки, как это сделано на рис. 12. Уменьшение плотности слоя приводит к дестабилизации струи во всем диапазоне неустойчивости. Отметим также некоторое сходство между этим рисунком (кривые 3–5) и рис. 11 (кривые 3, 4), в том смысле, что с убыванием ρ_0 на кривых $q - \alpha$ появляются отмеченные выше два локальных максимума, причем больший из них q_* также попадает в длинноволновой диапазон.

Уменьшение вязкости оболочки дестабилизирует струю (рис. 13), но этот эффект более слабый чем эффект плотности и к перестройке характера дисперсионных кривых не приводит.

Эффект толщины оболочки проиллюстрирован на рис. 14. При очень толстой оболочке (кривая 4) возмущения обеих фазовых поверхностей развиваются независимо. Поэтому дисперсионная кривая 4 соответ-

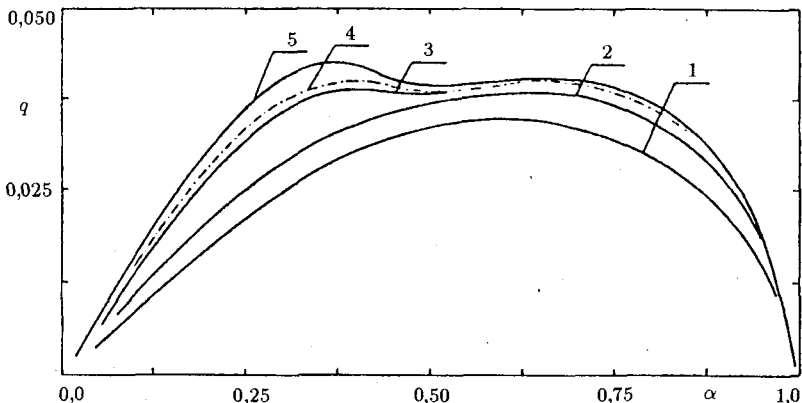


Рис. 12. Эффект плотности слоя на коэффициент усиления ($Re = 500$, $We = 50$, $r_2 = 2$, $\sigma_0 = \mu_0 = 1$): 1 — $\rho_0 = 2$; 2 — $\rho_0 = 0,5$; 3 — $\rho_0 = 0,16$; 4 — $\rho_0 = 0,1385$; 5 — $\rho_0 = 0,1$. При $\rho_0 = 0,1385$ оба максимума кривых $q - \alpha$ совпадают

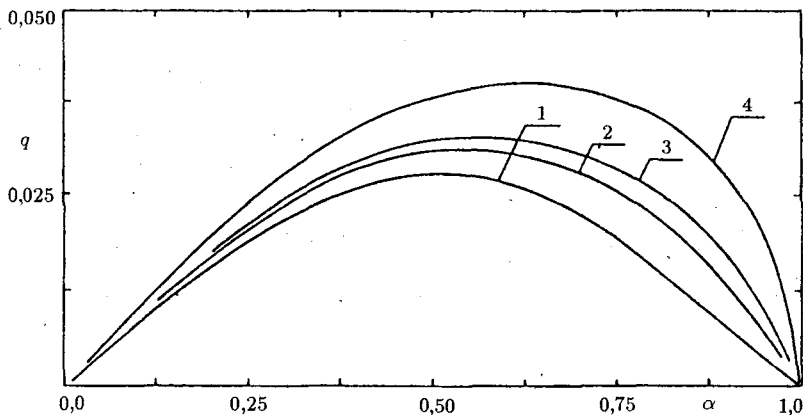


Рис. 13. Эффект вязкости слоя на коэффициент усиления ($Re = 500$, $We = 50$, $r_2 = 2$, $\sigma_0 = \rho_0 = 1$): 1 — $\mu_0 = 50$; 2 — $\mu_0 = 20$; 3 — $\mu_0 = 10$; 4 — $\mu_0 = 0,1$

вует однослойной вязкой струе, погруженной в пространство другой несмешивающейся жидкости. (В невязкой постановке этот асимптотический результат получен Шутовым [17].) Уменьшая толщину оболочки (кривые 1–3), начинает сказываться эффект внешнего поверхностного натяжения, что в длинноволновом диапазоне приводит к дестабилизации струи. В предельном случае $r_2 \sim 1$ на рис. 14 заметен отмеченный в (32) эффект сложения поверхностных натяжений (срв. кривые 1 и 1^S).

Конечно, наибольший интерес представляют формы потери устойчивости составной струи. Численный анализ длины первого распада L из

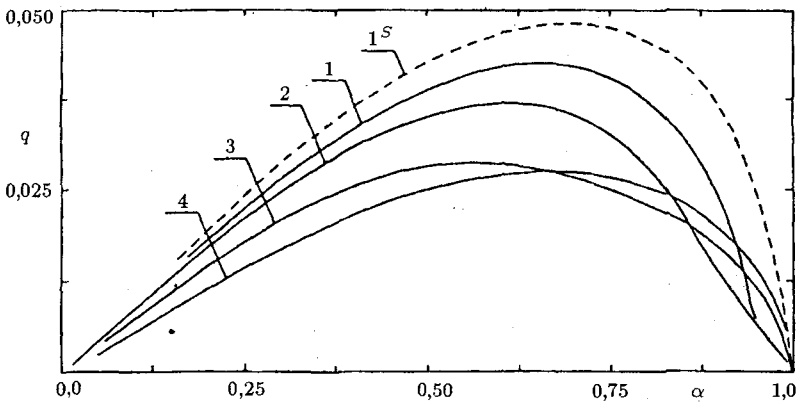


Рис. 14. Эффект толщины оболочки на коэффициент усиления.

— — — — — двухслойные струи с $Re = 500$, $We = 50$ и $\sigma_0 = \rho_0 = \mu_0 = 1$:
 1 — $r_2 = 1,1$; 2 — $r_2 = 1,25$; 3 — $r_2 = 1,67$; 4 — $r_2 \geq 5$;
 - - - - - однослойная струя с $Re = 500$, $We = 50$ и радиусом $r = r_1$

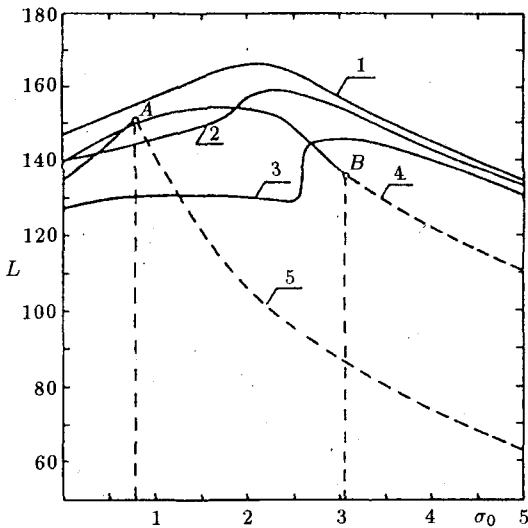


Рис. 15. Длина первого распада L как функция σ_0 ($Re = 87,12$, $We = 9,05$, $r_2 = 2,03$, $\ln(H_2/\delta_2) = 13,4$): 1 — $\rho_0 = 1$, $\mu_0 = 1$; 2 — $\rho_0 = 1$, $\mu_0 = 0,5$; 3 — $\rho_0 = 1$, $\mu_0 = 0,1$; 4 — $\rho_0 = 0,5$, $\mu_0 = 1$; 5 — $\rho_0 = 0,1$, $\mu_0 = 1$.
 — — — — — распад из-за дробления ядра (тип (a));
 - - - - - распад из-за соприкосновения межфазных поверхностей (тип (b));
 ⊙ — дробление как однослойную струю (тип (c))

(35), на которой происходит разрушение первоначальной конфигурации составной струи, подтверждает показанные на рис. 9 формы распада (a) и (c).

К ним надо добавить тип распада (b), который, как показывает рис. 15, реализуется только для слоя меньшей плотности $\rho_0 < 1$. При $\rho_0 \geq 1$ всегда первым дробится ядро и только в предельном случае $\sigma_0 \gg 1$ (при отсутствии поверхностного натяжения на поверхности ядра) оно распадается одновременно с оболочкой (тип (c)). Как показывает рис. 15, при $\rho_0 < 1$ можно, увеличивая σ_0 , наблюдать все три типа распада. До некоторого $\sigma = \sigma_{ог}$ (при фиксированных прочих параметрах) имеет место распад (a), а в точке $\sigma_{ог}$ — распад (c). За этим значением σ_0 , зависящим от безразмерных параметров задачи, распад струи происходит из-за соприкосновения межфазных поверхностей вдали от оси струи.

7. РАЗВИТИЕ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В СОСТАВНОЙ СТРУЕ

Экспоненциальное нарастание амплитуды возмущений приводит к тому, что после некоторого момента их нельзя считать малыми, обе неустойчивые моды не являются независимыми. Это говорит о том, что на определенной стадии развития возмущений в струе возбуждаются высшие гармоники и процесс распада становится нелинейным. Взаимодействие отдельных гармоник между собой приводит к перераспределению энергий возмущений между ними, к искажению формы межфазных поверхностей по сравнению с определяемой из линейной теории и в результате — к отрыву капель-сателлитов, перемежающихся с основными каплями.

Для количественного описания взаимодействия возмущений в составной струе можно воспользоваться методами, развитыми для однослойных струй, применительно к одномерным уравнениям движения (19)–(22). Если не считать прямые численные методы, то наиболее известными являются слабонелинейные подходы, предполагающие наличие в задаче малого параметра. Чаще всего таким параметром оказывается малая амплитуда начального возмущения ϵ .

Решение одномерных уравнений движения составной струй будем искать в виде ряда по степеням ϵ :

$$(58) \quad \begin{aligned} u_1 &= U_1 + \epsilon v, & u_2 &= U_2 + \epsilon w, & h_1 &= \delta + \epsilon \eta, & h_2 &= 1 + \epsilon \zeta, \\ G_1 &= F_0 + \epsilon f, & G_2 &= G_0 + \epsilon q, & \epsilon q &= \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \epsilon^3 q_3 + \dots \end{aligned}$$

Здесь q обозначает одну из величин v, w, η, ζ, f или q . Подстановка разложений (58) в уравнения (19)–(22) позволяет получить рекуррентную систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно $f_n, g_n, v_n, w_n, n = 1, 2, 3$, с учетом соотношений между возмущениями поперечного сечения ядра и кольцевого слоя и возмущениями радиуса ядра и свободной поверхности. Бегущие волны с переменной по времени амплитудой, соответствующие периодическим по z нестационарным решениям, полученной системы уравнений, ищутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 (59) \quad 2q_1 &= q_{11}(t) \exp(-i\alpha z) + q_{11}^* \exp(i\alpha z) + \dots, \\
 2q_2 &= 2q_{20}(t) + q_{22}(t) \exp(-2i\alpha z) + q_{22}^*(t) \exp(2i\alpha z) + \dots, \\
 2q_3 &= q_{31}(t) \exp(-i\alpha z) + q_{31}^* \exp(i\alpha z) + \dots,
 \end{aligned}$$

где q обозначает v , w , f или g .

Уравнения для комплексных амплитуд $q_{nm}(t)$ получаются после подстановки разложений (59) в рекуррентную систему и приравнивая к нулю коэффициенты при различных степенях $\exp(i\alpha z)$. Каждое из уравнений вновь полученной системы представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, поэтому следует задать начальные значения функции $q_{nm}(0)$, $\eta_{nm}(0)$, $\zeta_{nm}(0)$, которыми определяется начальное волновое возмущение с длиной $2\pi/\alpha$. Численным интегрированием по времени находятся $f_{nm}(t)$, $g_{nm}(t)$, $\eta_{nm}(t)$, $\zeta_{nm}(t)$, а затем по формулам (58), (59) восстанавливается форма ядра и свободной поверхности в произвольный момент.

Вышеприведенное решение получено в [2] совместно с некоторыми численными расчетами.

В равенствах (59) легко узнать разложения в ряде Фурье величин q . Это наводит на мысль о применении метода рядов Фурье непосредственно к исходным возмущенным величинам, т. е.

$$(60) \quad q = q_0 + [q_1 e_{-1} + q_1^* e_1] + [q_2 e_{-2} + q_2^* e_2] + \dots,$$

где для краткости $e_{\pm l} = \exp[\pm il(\alpha z - \omega t)]$, $l = 1, 2, \dots$, звездочкой (*) обозначен переход к комплексно сопряженному выражению, а под q подразумевается любая из величин u_j , h_j ($j = 1, 2$). Первый член ряда (60) обусловлен средним течением струи, второй член представляет основную гармонику, последующие члены — кратные ей гармоники. Среднее течение, в общем случае, не совпадает со стационарным, так как может содержать вклад от кратных гармоник из-за взаимодействия между ними.

Подставляя (60) в уравнения (19)–(22), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка для амплитуд q как функции времени. Из-за громоздкости мы не будем их приводить, отсылая читателя к [11], где изложен сам метод и некоторые конкретные численные результаты.

Повидимому более удобными для исследования нелинейной неустойчивости составной струи следуют признать методы прямого численного интегрирования одномерных уравнений движения. Во первых, вышеизложенные методы, в конечном итоге, сводят задачу к численному интегрированию, хотя и систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Во вторых, отказываясь от разложений, мы снимаем ограничение о слабой нелинейности взаимодействий в струе.

С этой целью в [9] был разработан численный метод, основанный на аппроксимации сплайнами формы поверхности, скорости и давления струи,

который применим к возмущенным течениям как однослойной, так и составной струй. Ниже основная идея сплайн-дифференчного метода изложена для составной струи на основе работы Радева, Бояджиева, Пузынина [10].

Введем для удобства новую систему отсчета, неподвижно связанную с невозмущенной струей (23), (24) и новое нормированное время:

$$(61) \quad \xi = \alpha z - \omega t, \quad \tau = \alpha \sigma^{1/2} t,$$

где $\omega = C_r / \alpha$ — угловая частота возмущений. Если при помощи подстановки

$$(62) \quad u_j \Rightarrow U_j' + \sigma_2^{1/2} u_j, \quad j = 1, 2,$$

нормировать возмущенные скорости, тогда одномерные уравнения движения струи (19)–(22) приводятся к следующему дивергентному виду:

$$(63) \quad \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial R}{\partial \xi} = 0,$$

где

$$(64) \quad Q = (G_1, u_1, G_2, u_2)^T, \\ R = \left((c_{1*} + u_1)G_1, c_{1*}u_1 + \frac{u_1^2}{2} + \sigma_\rho^{-1} + \rho_0 p_2, \right. \\ \left. (c_{2*} + u_2)G_2, c_{2*}u_2 + \frac{u_2^2}{2} + p_2 \right)^T;$$

здесь $c_{j*} = \sigma_2^{1/2}(U_j - \omega/\alpha)$, $\sigma_\rho = \sigma_2/\sigma_1$.

Для струи с однородным профилем скорости ($U_1 = U_2 = U_0 = 1$) без ограничения общности можно положить $c_{j*} = 0$, принимая, что возмущения распространяются со скоростью невозмущенного течения.

Уравнения (63), (64) замыкаются выражением для давления (срв. с (8))

$$(65) \quad p_j = \frac{1}{h_j} - \alpha^2 \frac{\partial^2 h_j}{\partial \xi^2}.$$

Будем рассматривать возрастающие по времени возмущения, периодические вдоль оси ξ с безразмерной длиной волны $\lambda = 2\pi$. Развитие волн можно исследовать начиная с произвольного периодического возмущения, обладающего необходимым классом гладкости. Наиболее естественными являются возмущения, получаемые из линеаризованной задачи (19)–(22), соответствующие второму семейству (см. (26)). Подобные начальные условия будем называть согласованными с большей модой. Они определены с точностью до произвольного множителя, например, начальной амплитуды h_{10} внутренней поверхности.

Для проведения численных расчетов вводится неявная консервативная сплайн-разностная схема

$$(66) \quad T \frac{Q_i - \bar{Q}_i}{\Delta \tau} + 3D^{(1)}(R_i + \bar{R}_i) = 0,$$

построенная на равномерной сетке с шагами $\Delta\xi$ и $\Delta\tau$. Здесь T и $D^{(1)}$ операторы, заданные на множестве периодических сеточных функций по формулам

$$(67) \quad Tf_i = f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}, \quad D^{(1)}f_i = (f_{i+1} - f_{i-1})/2\Delta\xi,$$

где $f_i \equiv f(\xi_i, \tau_k)$, а $\tilde{f}_i \equiv f(\xi_i, \tau_{k-1})$ отнесена к предыдущему временному слою.

Разностные уравнения (66), дополненные аналогичными аппроксимациями выражений для давлений (65), образуют замкнутую нелинейную алгебраическую систему:

$$(68) \quad F_i(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = 0.$$

Для этой системы целесообразно использовать метод Ньютона; в результате для s -ой итерации приходим к линейной задаче с блочно трехдиагональной циклической матрицей. Ее решение строится методом циклической матричной прогонки. В следующем параграфе приведены некоторые результаты численных расчетов из [10].

8. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОГО РАСПАДА ОДНОМЕРНОЙ СОСТАВНОЙ СТРУИ

Принципиально новый результат, который можно получить только в рамках нелинейной теории неустойчивости — это конечная форма распада составной струи. На рис. 16 и 17 показаны две такие формы, соответствующие моментам τ_b , предшествующим распаду исходной конфигурации струи. Сам момент τ_b находится из условия $h_1 \ll \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ некоторая разумно выбранная малая величина. Заметим, что конфигурации струи на этих рисунках рассчитаны для длин наиболее опасных возмущений при прочих фиксированных параметрах. При этих условиях времена τ_b — минимальные. Из-за симметрии относительно сечения $\xi = \pi$, профили поверхностей изображены в пределах одной полуволны.

На рис. 16 показан распад струи типа (а) (см. рис. 9). Участок волны, расположенный между максимальным и минимальным возвышениями поверхности ядра, соответствует основной капле. В соседстве с ней формируется капля меньших размеров — сателлитная — что является типично нелинейным эффектом.

Дробление ядра на основные и сателлитные капли подтверждается экспериментами Hertz, Hermanrud [21].

На рис. 17 показан распад струи как целое (типа (с)). Отрывающиеся от струи капли — как основные, так и сателлитные — сами имеют двухслойную структуру и состоят из ядра и концентрической оболочки. Подобная картина дробления струи также наблюдается в вышеупомянутых экспериментах.

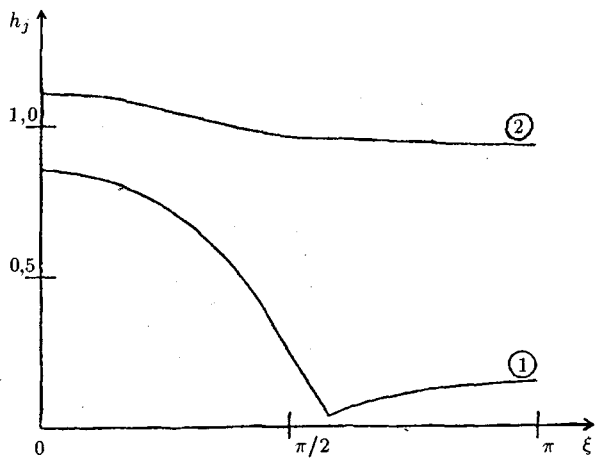


Рис. 16. Форма дробления ядра составной струи: $\delta = 0,5$, $h_{10} = 0,05$, $\rho_0 = 1$, $\sigma_0 = 1,333$, $\sigma_1 = 0,015$; $\alpha = \alpha_* = 1,414$, $\tau_b = \tau_{b*} = 3,48$

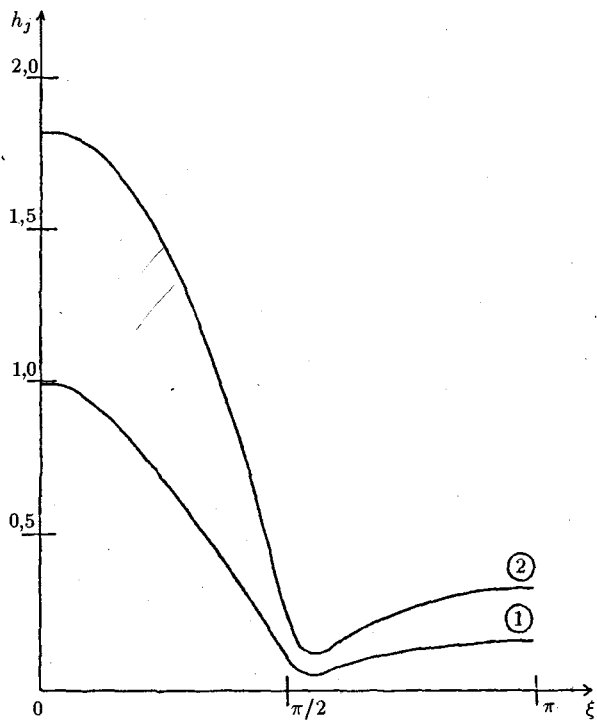


Рис. 17. Форма дробления составной струи как целое: $\delta = 0,5$, $h_{10} = 0,05$, $\rho_0 = 1$, $\sigma_0 = 40$, $\sigma_1 = 0,02$; $\alpha = \alpha_* = 0,707$, $\tau_b = \tau_{b*} = 4,145$

Разрушение струи типа (b) иллюстрируется на рис. 18. Оно происходит из-за утончения оболочки, которое имеет место внутри некоторого общего участка обеих поверхностей. Необходимым условием существования такого участка является меньшая плотность оболочки по сравнению с ядром ($\rho_0 < 1$). Представляет интерес экспериментальное подтверждение этой формы распада. Неясна также форма течения после потери устойчивости.

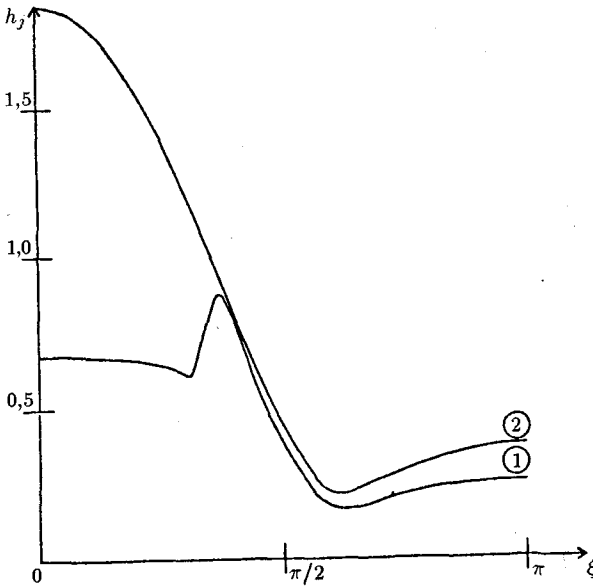


Рис. 18. Соприкосновение межфазных поверхностей как форма потери устойчивости составной струи: $\delta = 0,5$, $h_{10} = 0,05$, $\rho_0 = 0,5$, $\sigma_0 = 133,33$, $\sigma_1 = 0,015 \cdot 10^{-2}$, $\alpha = 0,707$, $\tau_b = 3,4$

Из вышеизложенного может создаться неправильное впечатление, что нелинейная теория ставит под сомнение применимость линейного анализа. На самом же деле ситуация значительно благоприятнее: нелинейные эффекты существенны в непосредственной окрестности момента распада. Поэтому как правило расчеты по линейной теории дают качественно правильное представление о длине нераспавшейся части струи, размере основных капель и т.д.

В подтверждение рассмотрим рис. 19, на котором время распада t_b показано как функция волнового числа. Так как в линейной теории это время обратно пропорционально коэффициенту усиления, легко заметить аналогию между рис. 19 и рис. 11, если учесть что минимумам на кривых $t_b - \alpha$ соответствуют максимумы на дисперсионных кривых $q - \alpha$. С возрастанием σ_p (за счет поверхностного натяжения оболочки) минимальное

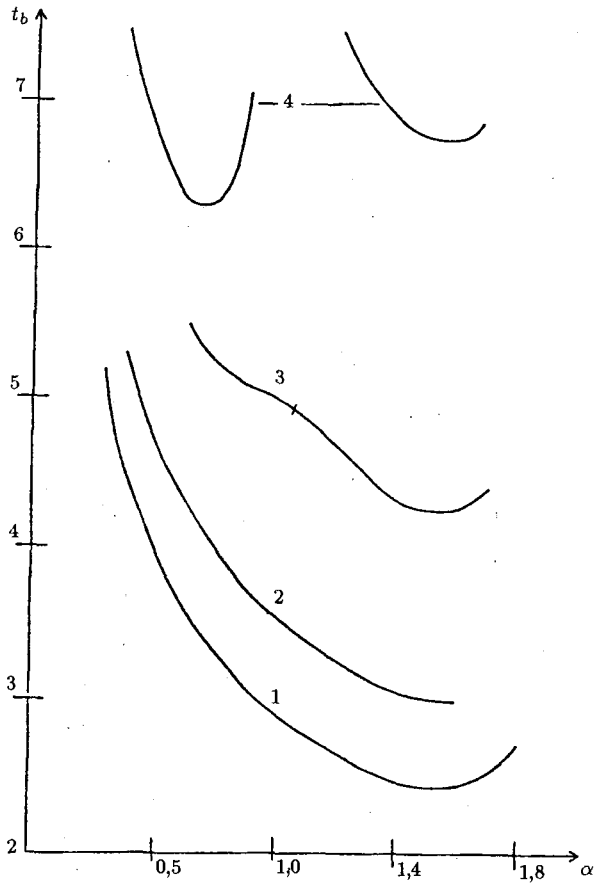


Рис. 19. Время распада исходной конфигурации составной струи: $\delta = 0,5$, $h_{10} = 0,05$, $\rho_0 = 1$, $\sigma_1 = 0,015$: 1 — $\sigma_0 = 1,333$; $\sigma_1 = 0,02$; 2 — $\sigma_0 = 2,0$, 3 — $\sigma_0 = 4,0$, 4 — $\sigma_0 = 10,0$

время распада передвигается из области коротких волн ($\alpha_* \approx \sqrt{2}/2\delta$) в область длинных ($\alpha_* \approx \sqrt{2}/2$).

Интересен и сам ход изменения аналога коэффициента усиления q_τ , вычисляемого в нелинейной теории из соотношений

$$(69) \quad q_{\tau_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{ds_{j+}}{d\tau} + \frac{ds_{j-}}{d\tau} \right), \quad j = 1, 2,$$

где

$$(70) \quad s_{j+} = \ln \left| \frac{\max h_j(\xi, \tau) - 1}{h_{j0}} \right|, \quad s_{j-} = \ln \left| \frac{\min h_j(\xi, \tau) - \delta}{h_{j0}} \right|$$

экспоненциальные показатели роста горба и впадины волны возмущения на j -той поверхности. В линейной теории эти показатели зависят линей-

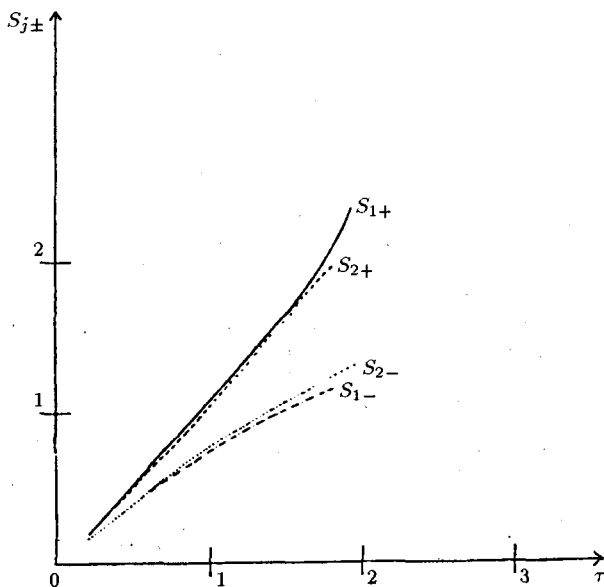


Рис. 20. Экспоненциальные показатели роста горба и убывания впадины волны: $\delta = 0,5$, $h_{10} = 0,05$, $\rho_0 = 1$, $\sigma_1 = 0,015$, $\sigma_2 = 0,02$; $\alpha = 0,5$

но от времени τ , что подтверждается начальными участками кривых $s_{j\pm}$ на рис. 20. Нелинейность процесса разрушения исходной конфигурации струи начинает сказываться вблизи момента распада.

9. ПОПЕРЕЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕВЯЗКОЙ СОСТАВНОЙ СТРУИ

Ограничиваясь рассмотрением достаточно малых отклонений оси струи от первоначальной прямолинейной формы, примем для краткости, что потеря устойчивости оси происходит в плоскости Oxz . Кроме того можно считать, что возмущенные положения поперечных сечений получаются из исходных сдвигом их центров вдоль оси Ox соответственно на x_1 для ядра и x_2 для полного сечения (см. рис. 21). Таким образом возмущенные межфазные поверхности S_j можно представить уравнениями

$$(71) \quad S_j : r = H_j + x_j \cos \varphi.$$

Течение в ядре и слое будем считать невязким и потенциальным. Как показано в [2], в такой постановке уравнения движения сводятся к трем уравнениям Лапласа для возмущенного давления в ядре, слое и окружающей среде:

$$(72) \quad \nabla^2 p_j = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

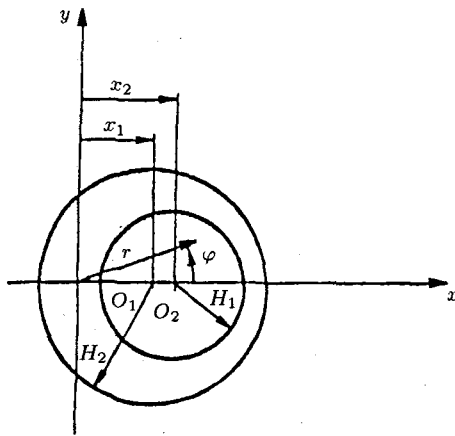


Рис. 21. Поперечное сечение составной струи после поперечной (изгибной) потери устойчивости

(Заметим, что вектор возмущенной скорости \vec{W} имеет три ненулевые составляющие (v, w, u) вдоль координатных линий (r, φ, z) .) В неосесимметрической постановке условия непротекания (6) имеют вид (по обе стороны поверхностей раздела)

$$(73) \quad \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} + U_j \frac{\partial x_j}{\partial z} \right) \cos \varphi = v_j|_{H_j}, \quad j = 1, 2,$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial t} + U_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} \right) \cos \varphi = v_2|_{H_1},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} \cos \varphi = v_3|_{H_2}.$$

Условия баланса нормальных напряжений (8) заменяются на

$$(74) \quad (p_j - p_{j+1})|_{H_j} = -\sigma_j \frac{\rho_j}{\rho_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial z^2} \cos \varphi, \quad j = 1, 2.$$

Задача об определении давления из (72) при краевых условиях (73), (74) допускает разделение переменных:

$$(75) \quad p_j = \bar{p}_j(r) \cos \varphi e^{i(\omega t - \alpha z)},$$

где α — волновое число, ω — комплексная частота; ω_i играет роль коэффициента нарастания возмущений. После громоздких, но прозрачных выкладок получаем дисперсионное соотношение поперечных возмущений:

$$(76) \quad b_2^{(2)} c_2^{(1)} - f b_2^{(1)} c_2^{(2)} = 0, \quad f = K_1'(\alpha) I_1'(\alpha/\delta) [K_1'(\alpha/\delta) I_1'(\alpha)]^{-1},$$

где штрихом обозначено дифференцирование относительно r . Коэффициенты b и c выражаются также через модифицированные функции Бесселя и безразмерные параметры задачи:

$$(77) \quad b_2^{(1)} = \sigma_1 + (c-1)^2 f_{11} - \rho_0(c-U_0)^2 g_{11}, \quad f_{11} = \frac{I_1(\alpha)}{\alpha I_1'(\alpha)},$$

$$c_2^{(1)} = \sigma_1 + (c-1)^2 f_{11} - \rho_0(c-U_0)^2 g_{11}, \quad g_{11} = \frac{K_1(\alpha)}{\alpha K_1'(\alpha)},$$

$$b_2^{(2)} = \sigma_2 - \frac{\rho_3}{\rho_2} \delta^{-1} c^2 g_{12} + \delta^{-1} (c-U_0)^2 g_{12}, \quad g_{12} = \frac{\delta K_1(\alpha/\delta)}{K_1'(\alpha/\delta)},$$

$$c_2^{(2)} = \sigma_2 - \frac{\rho_3}{\rho_2} \delta^{-1} c^2 g_{12} + \delta^{-1} (c-U_0)^2 f_{12}, \quad f_{12} = \frac{\delta I_1(\alpha/\delta)}{I_1'(\alpha/\delta)},$$

где $c = \frac{\omega}{\alpha}$.

Остановимся на некоторых асимптотических и численных результатах из [8].

Рассмотрим сначала длинноволновой диапазон $\alpha < 1$ дисперсионного соотношения (76), заменяя приближенно модифицированные функции Бесселя первыми членами их асимптотических выражений для малых α . Анализ будем проводить для двух предельных случаев: $U_0 \sim \epsilon$ и $1-U_0 \sim \epsilon$, где ϵ — малый параметр. В обоих случаях будем считать, что окружающее пространство заполнено невязким газом очень малой плотности.

При анализе первого случая дополнительно положим

$$(78) \quad \sigma_1 \sim \sigma_2 \sim \rho'_0 \sim \Delta \sim U_0,$$

где $\Delta = 1 - \delta$, $\rho'_0 = \rho_3/\rho_1$. Пренебрегая в уравнении (76) величинами порядка ϵ^2 , сведем его к виду

$$(79) \quad (1 + A_1)s^4 + 2(1 + B_1)s^3 + (1 + C_1)s^2 + 2D_1s + E_1 = 0,$$

где $s = c - 1$, а коэффициенты уравнения находятся из равенств

$$(80) \quad A_1 = (2 + \rho_0)\Delta + \rho'_0, \quad B_1 = (1 + 2\rho_0)\Delta + 2\rho'_0 - U_0,$$

$$C_1 = 2(1 + 3\rho_0)\Delta + 6\rho'_0 - 2U_0 - \sigma_1 - \rho_0\sigma_2,$$

$$D_1 = 2\rho_0\Delta + 2\rho'_0 - \sigma_1 - \rho_0\sigma_2, \quad E_1 = \rho_0\Delta + \rho'_0 - \sigma_1 - \rho_0\sigma_2.$$

В нулевом приближении ($\epsilon = 0$) уравнение (79) имеет два двойных корня $s = 0$ и $s = -1$. Уточнение первого корня дает слагаемое порядка $\epsilon^{1/2}$, которое удовлетворяет квадратному уравнению

$$(81) \quad s_1^2 + E_1 = 0.$$

Из последнего соотношения вытекают интересные физические выводы о влиянии дополнительного слоя на устойчивость ядра. При отсутствии слоя ядро является устойчивым или неустойчивым в соответствии с неравенством

$$(82) \quad \rho'_0 - \sigma_1 \geq 0.$$

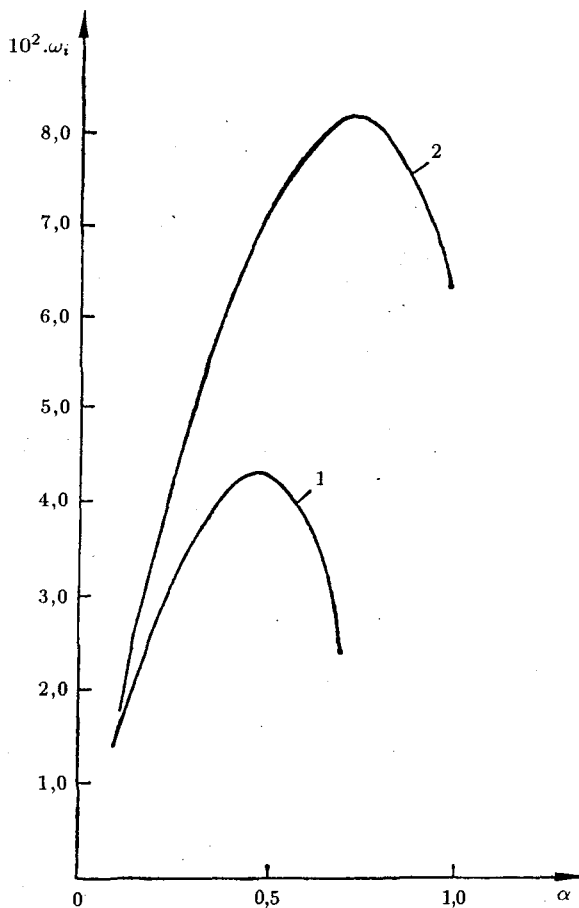


Рис. 22. Моды поперечной неустойчивости составной струи при почти неподвижной оболочке: $\sigma_1 = 0,01$, $\sigma_2 = 0,05$, $\rho_0 = 1$, $\Delta = 0,01$, $U_0 = 0,01$; 1 — $\rho'_0 = 0,08$, 2 — $\rho'_0 = 0,1$

Видно, что за счет оставшихся двух членов в выражении для E_1 , при помощи оболочки можно добиться как стабилизации первоначально неустойчивого ядра ($E_1 < 0$), так и дестабилизации его исходного устойчивого состояния ($E_1 > 0$). Этот эффект позволяет управлять устойчивостью струи. Отметим, что неустойчивые возмущения распространяются со скоростью ядра.

Для сравнения были проведены численные расчеты полного уравнения (76) для первого предельного случая $U_0 \sim \epsilon$. Результаты показали, что условие $E_1 > 0$ достаточно точно предсказывает переход к неустойчивым состояниям составной струи, но уравнение (81) дает довольно грубое приближение для коэффициента нарастания возмущений ω_i . Его можно улучшить при помощи уравнения (79), если определить следующие

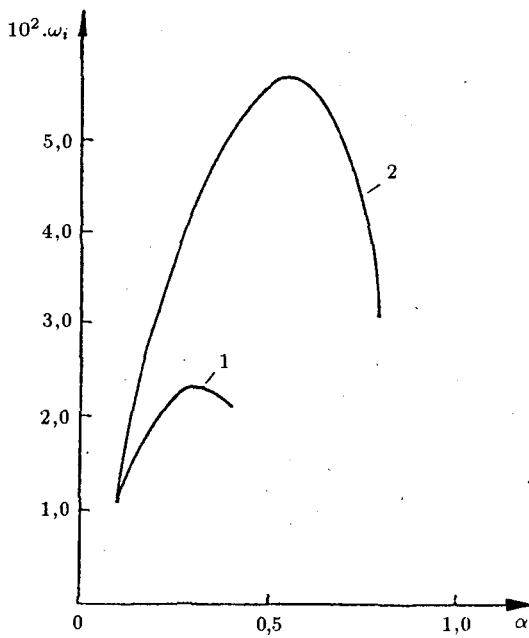


Рис. 23. Моды поперечной неустойчивости составной струи с почти однородным профилем невозмущенной скорости: $U_0 = 0,99$; остальные параметры и обозначения как на рис. 22

члены в разложении s по степеням $\varepsilon^{1/2}$. С точностью до членов порядка $\varepsilon^{3/2}$ имеем

$$s = \varepsilon^{1/2}(s_0 + \varepsilon^{1/2}s_1 + \varepsilon s_2),$$

$$(83) \quad s_1 = E_1 - D_1, \quad s_2 = \left(2E_1^2 - 3E_1D_1 + \frac{1}{2}D_1^2 + \frac{1}{2}E_1C_1\right) s_0^{-1}.$$

Формулы (83) представляют более точное приближение для коэффициента нарастания возмущений, хотя в них учтены не все члены порядка $\varepsilon^{3/2}$: при выводе уравнения (79) в (77) были опущены члены порядка ε^2 .

На рис. 22 показаны численные результаты для коэффициента нарастания при двух значениях параметра ρ'_0 . Обе кривые расположены в области длинных волн и проходят через максимум.

Во втором предельном случае примем

$$(84) \quad \sigma_1 \sim \sigma_2 \sim \rho'_0 \sim \Delta \sim 1 - U_0 = U_{12}.$$

Подставляя в дисперсионное соотношение (76) и пренебрегая членами порядка ε^2 , получаем

$$(85) \quad (1 + A_1)s_2 + 2B_1s + E_1 = 0,$$

где

$$(86) \quad A_1 = (2 + \rho_0)\Delta + \rho'_0, \quad B_1 = U_{12} + \rho'_0, \quad E_1 = \rho'_0 - \sigma_1 - \rho_0\sigma_2.$$

Остальные два корня уравнения (76) — нулевые; их можно уточнить сохранением членов порядка ε^2 и выше. Решение (85) с точностью $\varepsilon^{1/2}$ находится из уравнения

$$(87) \quad s^2 + E_1 = 0;$$

являющегося аналогом уравнения (81) в рассматриваемом предельном случае.

Физический смысл асимптотического результата (87) следует из сравнения выражения для E_1 с левой частью неравенства (82). Добавление концентрического слоя той же или близкой невозмущенной скорости оказывает только стабилизирующее воздействие на ядро.

Численные результаты подтверждают сделанный вывод. Однако для расчета коэффициента нарастания с удовлетворительной точностью, также как и выше, необходимо вычислить следующие члены разложения корня s по степеням $\varepsilon^{1/2}$. Два конкретных случая численного расчета коэффициента нарастания показаны на рис. 23.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов, В. М., А. Л. Ярин. Динамика струй капельной жидкости. Препринт ИПМ АН СССР, М., 1979.
2. Епихин, В. Е., С. П. Радев, В. Я. Шкадов. Неустойчивость и дробление двухслойных капиллярных струй. Изв. АН СССР, *Мех. жидкости и газа*, 3, 1987, 29–35.
3. Епихин, В. Е., С. Радев, В. Шкадов. Качественное исследование устойчивости течений составных струй. *Теор. и прикл. механика*, БАН, 4, 1988, 48–57.
4. Каменов, О., С. Радев. Линейна неустойчивост на двуслойна невискозна капиллярна струя. *Теор. и прикл. механика*, БАН, 3, 1987, 44–53.
5. Каменов, О., С. Радев. Линейна неустойчивост на вискозна двуслойна струя. *Теор. и прикл. механика*, БАН, 1, 1988, 50–59.
6. Петряков-Соколов, И. В., А. А. Шутков. *ДАН СССР*, 276, 1984, 576–578.
7. Радев, С. Капиллярни струйни течения при силно взаимодействие с околната среда. Автореферат на докт. дисертация, БАН, 1986.
8. Радев, С. Поперечная неустойчивость двухслойной жидкой капиллярной струи. *Теор. и прикл. механика*, БАН, 1, 1986, 45–54.
9. Радев, С., Т. Бояджиев, И. Пузынин. Численное исследование неустойчивости жидкой капиллярной струи. *Сообщения ОИЯИ*, № P5-86-653, 1986.
10. Радев, С., Т. Бояджиев, И. Пузынин. Численное моделирование нелинейной неустойчивости двухслойной капиллярной струи. *Сообщения ОИЯИ*, № P5-86-699, 1986.
11. Радев, С., Р. Йорданов. Нелинейная неустойчивость капиллярной струи, взаимодействующей с коаксиальным слоем несмешивающейся жидкости. *Сообщения ОИЯИ*, № P5-86-748, 1986.
12. Радев, С., В. Шкадов. Об устойчивости двухслойной капиллярной струи. *Теор. и прикл. механика*, БАН, 3, 1985, 68–75.
13. Рэлей, В. Теория звука. ОГИЗ, М. 1944.
14. Чавдаров, В. Численный анализ неустойчивости капиллярных струй. Дис. на соиск. учен. степени канд. мат. наук, Инст. мех. и биомех., Болг. Акад. Наук, С., 1986.

15. Шкадов, В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. *Научные труды И-т механики МГУ*, **25**, 1973.
16. Шкадов, В. Я., С. Радев, И. Пенчев, П. Господинов. Течение и неустойчивость жидких капиллярных струй. *Успехи механики*, **5**, 1982, 103-146.
17. Шутов, А. А. Изв. АН СССР, *Мех. жидкости и газа*, **4**, 1985, 3-8.
18. Abramov, A. A., E. S. Birger, N. B. Konyukhova, V. I. Ulianova. *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. Keszhely, Hungary, Numerical Methods*, **22**, North-Holland, 33-67.
19. Debye, P., J. Daen. *Phys. Fluids*, **2**, 1959, 416-421.
20. Hermanrud, B., C. H. Hertz. *J. Appl. Photogr. Eng.*, **5**, 1979, 220-225.
21. Hertz, C. H., B. Hermanrud. *J. Fluid Mech.*, **131**, 1983, 271-287.
22. Lee, H. C. *IBM J. Res. Develop.*, **18**, 1974, 364-369.
23. Radev, S., P. Gospodinov. Numerical Treatment of the Steady Flow of a Liquid Compound Jet. *Int. J. Mult. Flow*, **12**, 1986, 997-1007.
24. Radev, S., B. Tchavdarov, I. Penchev. On the Instability of a Liquid Capillary Jet Flowing into an Immiscible Liquid. *Theor. Appl. Mech., Bulg. Acad. Sci.*, **1**, 1983, 70-78.
25. Radev, S., B. Tchavdarov. Linear Capillary Instability of Compound Jets. *Int. J. Mult. Flow*, **14**, 1988, 67-79.
26. Sanz, A., J. Meseguer. *J. Fluid Mech.*, **159**, 1985, 55-68.
27. Tayfer, J. *Leosung der Randwertprobleme feur Systeme von linearen Differentialgleichungen. Academia, Praha*, 1973.

Поступила 15.03.1994