ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 3
Том 88, 1994

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 3
Tome 88, 1994

МОДЕЛИРАНЕ НА СТОКСОВИ ТЕЧЕНИЯ ЧРЕЗ МЕТОДА НА ОСОБЕНОСТИТЕ

ЗАПРЯН ЗАПРЯНОВ

Запрян Запрянов. МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОКСОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ОСОБЕННОСТЕЙ

Рассматриваются стационарные и осцилирующие течения в присутствии твердых или жидких частиц. Течения моделируются посредством фундаментальных решений стационарных и нестационарных уравнений Стокса, включая решения как стокслет, дипол Стокса, осцилирующий стокслет, осцилирующий дипол и многие другие мультиполы. Выведены обобщенные законы Лоренца и Факсена о твердых и жидких частицах посредством полученных сингулярных решений. Теоретические результаты применены в исследовании трансляционного и ротационного стационарного или осцилационного движения твердых или жидких сферических частиц в вязкой жидкости. Сделан подсчет силы $\vec{F}$, необходимой для совершения продольных или поперечных осциляций при различных частотах ω.

Zapryan Zapryanov. MODELLING OF STOKES FLOWS THROUGH A SINGULARITY METHOD

Steady and oscillatory viscouse flows in the presence of rigid or fluid particles are considered. The flows are represented in terms of fundamental solutions to the governing steady and nonsteady Stokes equations, including Stokeslet, Stokes dipol, oscillating Stokeslet, oscillating dipole and many other multipoles.

Compendious Lorentz and Faxen's laws for solid and fluid particles are derived in terms of singularity representations. The theoretical results are applied in studies of the translational and rotational steady or oscillation motion of spherical rigid and fluid particles in a viscouse fluid. The force $\vec{F}$ on the particles executing longitudinal or transverse oscillations is computed in an extended range of frequences ω.

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Моделирането на флуидни течения посредством метода на особеностите започва преди много години, когато са въведени особените (математическите) течения извор, бездна, дипол, концентриран (линеен) вихър и др. [1]. Тъй като потенциалите на тези течения удовлетворяват линейното уравнение на Лаплас, за да се моделира чрез тях реално флуидно течение, достатъчно е да се комбинират няколко математически течения по такъв начин, че да могат да се удовлетворят граничните условия на съответното реално течение. Прост такъв пример е моделирането на обтичането на твърда сферична частица от равномерен поток при предположение, че породеното течение е потенциално. За целта е достатъчно да се вземат равномерен поток в безкрайност и дипол, разположен в центъра на обтичаната частица.

От хидродинамиката е известно как чрез метода на особеностите се намира потенциалът на течение, породено от обтичане на частица с произволна форма. Известни са също недостатъците на модела на идеалните флуиди, който се основава на уравненията на Ойлер. Като пример за такъв недостатък ще споменем парадокса на Даламбер — тяло, движещо се с постоянна скорост в идеален флуид не изпитва съпротивление. Това, разбира се, е в грубо противоречие с експерименталните резултати. Затова изследователите се насочват към модела на вискозните флуиди. Тъй като движението на вискозните флуиди се описва от сложното нелинейно векторно уравнение на Навие — Стокс

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} + \vec{F} \tag{1.1}$$

(тук $\vec{v}$ е скоростта на флуида, ρ — плътността му, p — налягането и $\vec{F}$ — силата, действаща на единица маса), при определени ограничения (например при бавни движения) се прилага линейното уравнение на Стокс

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} + \vec{F}. \tag{1.2}$$

Когато се разглеждат стационарни течения, уравнението (1.2) има вида

$$\nu\nabla^2\vec{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{F} = 0. \tag{1.3}$$

Уравненията (1.2) и (1.3) са известни като уравнения на хидродинамиката на вискозни флуиди при малки числа на Рейнолдс.

Разработването на метода на особеностите за стационарни стоксови течения започна с работите на Лоренц [2], Озин [3] и Бюргерс [4]. Този метод има голямо приложение в т. нар. теория на „тънкото тяло“. Важни изследвания на хидродинамиката на „тънките тела“ при малки числа на Рейнолдс са извършени от Ханкок [5], Броерсма [6], Тюск [7], Тейлър [8], Батчелор [9], Кокет [10] и др. Основна роля за по-нататъшното прилагане и развитие на метода на особеностите играе статията на Чунг и Ву [11] от 1975 г. В нея са дискутирани някои от т. нар. фундаментални (сингулярни) решения на уравненията на Стокс — стокслет, ротлет, стоксов дипол, квадрапол, октопол и др. Въведени са и нови фундаментални решения, наречени стоксон, ротон, стресон и др. Тези фундаментални решения се използват за моделиране на някои конкретни стационарни стоксови течения.

Методът на особеностите е полезен с това, че чрез него се получават точни аналитични или числени решения на съответните гранични хидродинамични задачи. Това дава възможност получените хидродинамични резултати да се използват с успех при моделирането на суспензиите, емулсиите и други дисперсни системи. Първите теоретични изследвания на суспензиите извършва Айнщайн [12]. Той изследва граничния случай на еднакви сферични частици, които са толкова отдалечени една от друга, че движението на всяка от тях може да се разглежда като движение на една частица в безкрайна течност. За такъв вид разредени суспензии той получава формулата

$$\mu^* = \mu\left(1 + \frac{5}{2}\varphi\right), \tag{1.4}$$

където μ е вискозитетът на течността, φ — отношението на обема на диспергираните частици към обема на суспензията, а μ^* — нейният ефективен вискозитет.

Ефективният вискозитет на силно разредени емулсии е пресметнат от Тейлър [13] посредством метода на Айнщайн:

$$\frac{\mu^*}{\mu} = 1 + \frac{\mu + \frac{5}{2}\hat{\mu}}{\mu + \hat{\mu}}\varphi. \tag{1.5}$$

Тук μ и $\hat{\mu}$ са вискозитетите съответно на носещата и дисперсната фаза. Когато $\dfrac{\hat{\mu}}{\mu} \to \infty$ (т. е. при суспензия от твърди сферични частици), от формулата (1.5) се получава като частен случай формулата на Айнщайн (1.4). Когато $\dfrac{\hat{\mu}}{\mu} \to 0$ (т. е. при емулсия с газови мехури), от (1.5) следва формулата

$$\mu^* = \mu(1 + \varphi). \tag{1.6}$$

Като отчитат бинарното хидродинамично взаимодействие на твърдите сферични частици, Батчелор и Грийн [14] получават за ефективния вискозитет на разредени суспензии формулата

$$\frac{\mu^*}{\mu} = 1 + \frac{5}{2}\varphi + 7{,}6\varphi^2. \tag{1.7}$$

Важно място в хидродинамичното изследване на движението на частици във вискозен флуид заемат нестационарните течения. Анализът на стоксово течение при произволна нестационарна скорост на движение на твърда или флуидна частица във вискозен флуид се извършва с прилагането на преобразуванията на Фурие или Лаплас за нестационарното уравнение (1.2) на Стокс. Така се елиминира времето като явна независима променлива и разглежданията се свеждат до решаване на стационарни уравнения. За силата на съпротивлението на твърда сферична частица, осцилираща във вискозен флуид, Стокс [15] получава

$$F = \mathrm{Real}\left\{-6\pi\mu U_0 a\left(1+\lambda+\frac{\lambda}{9}\right)e^{-i\omega t}\right\}, \tag{1.8}$$

където $\lambda^2 = -i\dfrac{a^2\omega}{\nu} = -iM^2$ $(\mathrm{Real}\{\lambda\} > 0)$, ω е честотата на осцилациите, a — радиусът на сферичната частица, U_0 — характерна скорост в течението и $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ — вискозитетът на флуида.

Като интегрира уравнението (1.2), Басет [16] получава съпротивлението на сферична частица, движеща се във вискозен флуид с нестационарна скорост $U(t)$:

$$F = -6\pi\mu aU + 6\pi\mu a^2\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \frac{dU}{d\tau}(t-\tau)^{-1/2}d\tau - \frac{2}{3}\pi a^3\rho\frac{dU}{dt}. \tag{1.9}$$

Осцилациите на сфероид (ротационен елипсоид) във вискозен флуид са изследвани от Бахънън [17], а на кръгов цилиндър — от Шлихтинг [18]. Заслужават внимание и изследванията на осцилиращи елипсоиди във вискозен флуид, извършени от Кануъл [19] и на Лай и Мокрос [20].

Райли [22] първи прилага метода за срастване на асимптотичните разлагания (вж. Ван Дайк [21]) за изследване осцилациите на сферична частица във вискозен флуид. Той използва уравнението на Навие — Стокс (1.1) и решава съответната хидродинамична задача както във външната (озинова) област, така и във вътрешната (стоксова) област.

Хармоничните транслационни осцилации на флуидна частица във вискозен флуид изследват Запрянов и Стоянова [23]. Като използват метода за срастване на асимптотичните разлагания, Табакова и Запрянов [24] решават задачата за транслационни високочестотни осцилации на две сферични частици както в направление на правата, свързваща центровете им, така и на перпендикулярната на нея. Запрянов и др. [25] изследват транслационните високочестотни осцилации на два кръгови цилиндъра, а Ковачева и Запрянов [26] — ротационните високочестотни осцилации на две сферични частици във вискозен флуид.

Асимптотични резултати за частици с произволна форма при осцилации с ниски и високи честоти са получени от Кануъл [27], Уилиамс [28] и Батчелор [29].

Нестационарното движение на капка във вискозен флуид е изследвано от Си и Лайтфут [30], Морисън и Стюарт [31] и Чиснел [32].

При решаването на хидродинамичните задачи за стоксови течения се използват главно два подхода:

1. Метод на Фурие за разделяне на променливите, метод за срастване на асимптотичните разлагания и др. за решаване на съответните гранични задачи.

2. Метод на особеностите, при който се използва известна система от фундаментални (сингулярни) решения на уравнението на Стокс така, че да се удовлетворят граничните условия на разглежданите течения.

През последните години започна все по-често да се прилага методът на особеностите. Аналогично на Чунг и Ву [11] Ким и Аранхалам [33] разглеждат стационарни течения.

Позрикидис [34] изследва основните фундаментални решения на нестационарното уравнение на Стокс — осцилиращ стокслет, осцилиращи дипол, квадрапол, октопол и др.

Настоящата статия е посветена на прилагането на метода на особеностите за моделиране на стоксови течения. Разгледани са както стационарни, така и нестационарни течения.

2. СТАЦИОНАРНИ СТОКСОВИ ТЕЧЕНИЯ

Моделирането на стационарни стоксови течения се основава на използването на фундаменталните решения на уравненията

$$\nabla . T = \mu \nabla^2 \vec{v} - \nabla p = \vec{F}\delta(\vec{r}), \tag{2.1}$$

$$\nabla . \vec{v} = 0, \tag{2.2}$$

където $\delta(\vec{r})$ е делта-функцията на Дирак и $\vec{F} = \overrightarrow{\text{const}}$ е концентрирана сила, действаща в началото на координатната система $x_1 x_2 x_3$. Смисълът на уравнението (2.1) се определя от следните две изисквания:

1) $-\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} = 0$ при $\vec{r} \neq \vec{0}$;

2) при $\vec{r} = \vec{0}$ за всеки обем V_0, обхващащ началото на координатната система, да бъде изпълнено равенството

$$\iiint\limits_{V_0} \left(-\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}\right) d\tau = -\vec{F}.$$

2.1. СТАЦИОНАРНО РЕШЕНИЕ, ПОРОДЕНО ОТ ДЕЙСТВИЕТО НА КОНЦЕНТРИРАНА (ТОЧКОВА) СИЛА

През 1927 г. Озин намира, че скоростта и налягането на стационарното решение, породено от действието на концентрирана сила, имат съответно вида

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{F} . \frac{B(\vec{r})}{8\pi\mu}, \tag{2.1.1}$$

(2.1.2) $$p(\vec{r}) = \vec{F}.\frac{\vec{P}(\vec{r})}{8\pi\mu},$$

където B се нарича тензор на Озин, а $\vec{P}$ — вектор на Озин.

Изразът $\dfrac{B(\vec{r})}{8\pi\mu}$, където

(2.1.3) $$B_{ij}(\vec{r}) = \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3} \quad (r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}),$$

се нарича диадик на Грийн. Той не зависи от свойствата на разглеждания флуид. Проекциите на вектора на налягането, съответстващо на озиновия тензор B, се записва във вида

(2.1.4) $$P_j(\vec{r}) = 2\mu\frac{x_j}{r^3}.$$

Фундаменталното (сингулярно при $\vec{r} = \vec{0}$) решение (2.1.1), (2.1.2) на уравненията (2.1) и (2.2) се нарича стокслет. Напрежението, което съответства на скоростта на стокслета, е триадик, който означаваме с $8\pi\mu \sum ijk$. Като вземем предвид, че

(2.1.5) $$B_{ij,k} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{r^3}(-\delta_{ij}x_k + \delta_{jk}x_i + \delta_{ik}x_j) - \frac{3}{r^5}x_i x_j x_k,$$

получаваме

(2.1.6) $$8\pi\mu \sum ijk = -P_j\delta_{ik} + \mu(B_{ij,k} - B_{kj,i}) = -6\mu\frac{x_i x_j x_k}{r^5}.$$

По-нататък в изложението ще изоставим силата $\vec{F}$ и вместо уравненията (2.1) и (2.2) ще използваме уравненията

(2.1.7) $$8\pi\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\sum ijk(\vec{r} - \vec{\rho}) = \mu\nabla^2 B_{ij} - \frac{\partial P_j(\vec{r} - \vec{\rho})}{\partial x_i} = -8\pi\mu\delta_{ij}\delta(\vec{r} - \vec{\rho}),$$

(2.1.8) $$\frac{\partial}{\partial x_i}B_{ij}(\vec{r} - \vec{\rho}) = 0,$$

в които особената точка е $\vec{r} = \vec{\rho}$, а не $\vec{r} = \vec{0}$.

2.2. ТЕОРЕМА ЗА ВЗАИМНОСТ НА ДВЕ СТАЦИОНАРНИ СТОКСОВИ ТЕЧЕНИЯ

За да запишем интегралното представяне на полето на скоростта при стоксови течения, ще формулираме т. нар. теорема за реципрочност (взаимност) на Лоренц. Тя се отнася за две стоксови течения на флуид, намиращ се в обем V_0 и ограничен от повърхнината S.

Ако означим с $\vec{v}$ и $\vec{v}^*$ скоростите на двете стоксови течения, теоремата на Лоренц гласи:

(2.2.1) $$\iint_S \vec{v}^*.(T.\vec{n})\,d\sigma = \iint_S \vec{v}.(T^*.\vec{n})\,d\sigma,$$

където T и T^* са тензорите на напреженията, съответстващи на скоростите $\vec{v}$ и $\vec{v}^*$.

2.3. ИНТЕГРАЛНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА РЕШЕНИЯТА НА УРАВНЕНИЯТА (2.1), (2.2)

Интегралното представяне на решенията на уравненията (2.1) и (2.2) може да се разглежда като преформулиране на тримерните частни диференциални уравнения, описващи движението на флуида, в двумерни интегрални уравнения с неизвестна плътност (интензитет) на особеностите, разположени на границата S на флуида. Това намаляване на размерността от тримерна в двумерна е от голямо значение при численото решаване на хидродинамични проблеми. Интегралното представяне на смутената от наличието на частица (или частици) скорост има вида

$$\vec{v}(\vec{r}) = -\iint\limits_S [T(\vec{\rho}).\vec{n}]\,.\frac{B(\vec{r}-\vec{\rho})}{8\pi\mu}\,d\sigma(\vec{\rho}) - \iint\limits_S \vec{v}(\vec{\rho})\cdot\left[\sum(\vec{r}-\vec{\rho}).\vec{n}\right]\,d\sigma(\vec{\rho}). \tag{2.3.1}$$

По аналогия с решаването на уравнението на Лаплас първият член в дясната страна на (2.3.1) се нарича потенциал на простия слой, а вторият — потенциал на двойния слой.

Скоростта на течението, породено от обтичането със скорост $\vec{v}^{\infty}$ на твърда частица, се представя само с прост слой

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}^{\infty}(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi\mu}\iint\limits_{S_p}(T(\vec{\rho}).\vec{n}).B(\vec{r}-\vec{\rho})\,d\sigma(\vec{\rho}). \tag{2.3.2}$$

Това е в съответствие с интуицията, че смущенията във флуида, породени от релативното движение на твърдо тяло в него, могат да се представят като сбор от концентрирани сили, действащи на повърхността на тялото. Този прост резултат не се отнася за флуидни частици. За представянето на скоростта при тях е необходим както прост слой, така и двоен слой.

2.4. МНОГОПОЛЮСНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА СКОРОСТТА НА ФЛУИДА ДАЛЕЧ ОТ ЧАСТИЦАТА

Съществува универсален начин за записване на скоростта на смутеното от наличието на твърда частица скоростно поле. Това е т. нар. многополюсно разлагане на скоростта, което дава добро приближение само далеч от частицата. Тъй като при $|\vec{r}| \gg |\vec{\rho}|$ точките върху повърхността на частицата не се различават съществено от началото на координатната система (което е взето в удобна точка вътре в частицата), можем да запишем

$$B(\vec{r}-\vec{\rho}) \sim B(\vec{r}). \tag{2.4.1}$$

Поради това тензорът $B(\vec{r})$ може да се изнесе пред интеграла на простия слой. Така получаваме

$$(2.4.2) \qquad \vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}^{\infty}(\vec{r}) - \frac{B(\vec{r})}{8\pi\mu} \iint_{S_p} T(\vec{\rho}).\vec{n}\, d\sigma.$$

Интегралът в равенството (2.4.2) е равен на хидродинамичното съпротивление — $\vec{F}$, което оказва частицата на флуида. По този начин интегралът на простия слой се опростява значително и скоростта

$$(2.4.3) \qquad \vec{v}^{D} \sim -\vec{F}.\frac{B(\vec{r})}{8\pi\mu}$$

далеч от частицата не зависи от подробностите, свързани с формата ѝ. За полето на скоростта (2.4.3) могат да се получат корекции от по-висок ред, които се явяват моменти на вектора на напрежението $T.\vec{n}$. За да получим многополюсното разлагане на скоростта, най-напред полагаме $|\vec{r}| \gg |\vec{\rho}|$ и развиваме в тейлоров ред $B(\vec{r}-\vec{\rho})$ относно $\vec{\rho} = \vec{0}$:

(2.4.4)

$$B_{ij}(\vec{v}-\vec{\rho}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\vec{\rho}.\nabla)^n B_{ij}(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \xi_{k_1}\xi_{k_2}\ldots\xi_{k_n} B_{ij,k_1k_2\ldots k_n}(\vec{r}).$$

Като заместим (2.4.4) във формулата за скоростта (2.3.2), получаваме многополюсното разлагане на скоростта:

$$(2.4.5)\, \vec{v}_i - \vec{v}_i^{\,\infty} = -\frac{1}{8\pi\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_{ij,k_1k_2\ldots k_n}(\vec{r}) \iint_{S_p} (T.\vec{n})_j \xi_{k_1}\xi_{k_2}\ldots\xi_{k_n}\, d\sigma$$

$$= -\frac{F_j}{8\pi\mu} B_{ij}(\vec{r}) + \frac{D_{jk}}{8\pi\mu} B_{ij,k}(\vec{r}) + \cdots,$$

където

$$F_j = \iint_{S_p} (T.\vec{n})_j\, d\sigma, \qquad D_{jk} = \iint_{S_p} (T.\vec{n})_j \xi_k\, d\sigma.$$

Този резултат означава, че в т. нар. „далечно приближение“ смущенията, които внасят в потока частиците независимо от тяхната форма, имат общи черти. Първият член в многополюсното разлагане (2.4.5), т. е. монополът, е стокслет с коефициент $\vec{F}$, равен на силата, която упражнява флуидът върху частицата.

Далеч от частицата монополът намалява както $|\vec{r}|^{-1}$ и съществува тогава и само тогава, когато флуидът и частицата имат силово въздействие помежду си. Следващият ефект е свързан със силовия дипол D. Той е тензор от втори ранг и неговото скоростно поле намалява далеч от частицата както $|\vec{r}|^{-2}$.

За частица с произволна форма многополюсното разлагане (2.4.5) съдържа безбройно много членове. В „далечно приближение“ първите няколко члена в (2.4.5) съдържат главните членове в поведението на смутената от частицата скорост и в същото време дават информация за хидродинамичното съпротивление, момента и др. при движението на частицата. Напротив, в т. нар. „близко приближение“ всички членове в разлагането (2.4.5) са сравними по големина. Затова методът за намиране на скоростта, основаващ се на многополюсното разлагане, става много сложен освен в случаите, когато са налице някакви опростяващи фактори. Например за сферична частица многополюсното разлагане на скоростта съдържа само няколко члена. За частица с елипсовидна форма в (2.4.5) участват само особености от нисък ред при условие, че тези особености са разпределени непрекъснато в даден интервал. Това непрекъснато разпределение на особености се нарича система от образи, а получените изрази за скоростта — фундаментални (сингулярни) решения.

Ще напишем в явен вид тензора на Озин – Бюргерс и някои от неговите производни:

1. Тензор на Озин – Бюргерс:

$$B_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3}, \quad r = (x_i x_j)^{1/2}.$$

2. Производна на тензора на Озин – Бюргерс:

$$B_{ij,k} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{r^3}(-\delta_{ij}x_k + \delta_{jk}x_i + \delta_{ik}x_j) - \frac{3}{r^5}x_i x_j x_k.$$

3. Изроден квадрапол:

$$\nabla^2 B_{ij} = \frac{2\delta_{ij}}{r^3} - \frac{6x_i x_j}{r^5}.$$

4. Производна на изродения квадрапол:

$$\nabla^2 B_{ij,k} = -\frac{6}{r^5}(\delta_{ij}x_k + \delta_{jk}x_i + \delta_{ik}x_j) + \frac{30x_i x_j x_k}{r^7}.$$

Ако $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са произволни постоянни вектори, скоростите на някои по-характерни фундаментални (сингулярни) решения могат да се запишат във вида:

1. Стоксов дипол:

$$\vec{v}_D = (\vec{b}.\nabla)\vec{v}_{\text{Ст.}}(\vec{r},\vec{a}) = \frac{(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{r}}{r^3} - \left[\frac{\vec{a}.\vec{b}}{r^3} - 3\frac{(\vec{a}.\vec{r})(\vec{b}.\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right].$$

2. Стоксов квадрапол:

$$\vec{v}_{QP} = (\vec{c}.\nabla)(\vec{b}.\nabla)\vec{v}_D(\vec{r},\vec{a}).$$

3. Стреслет (симетричната част на стоксовия дипол):

$$\vec{v}_{\text{стр.}} = \left[\frac{\vec{a}.\vec{b}}{r^3} + \frac{3(\vec{a}.\vec{r})(\vec{b}.\vec{r})}{r^5}\right].$$

4. Ротлет (*антисиметричната част на стоксовия дипол*):

$$v_{\text{рот.}} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{v}_S.$$

5. Потенциален дипол:

$$v_{\text{п.д.}} = -\frac{1}{2}\nabla^2\vec{v}_S.$$

За вътрешни течения могат да се използват такива фундаментални решения на (2.1), (2.2), които са сингулярни (особени) в безкрайност и регулярни навсякъде другаде. Ето как се записват някои от тях:

1. Стоксон:

$$\vec{v}_{\text{стр.}} = 2\vec{a}r^2 - (\vec{a}.\vec{r})\vec{r}.$$

2. Стоксонов дипол (производна на стоксона):

$$\vec{v}_{\text{с.д.}} = (\vec{b}.\nabla)\vec{v}_S(\vec{r},\vec{a}) = (\vec{a}.\vec{b})\vec{r} + (\vec{a}.\vec{r})\vec{b} - 4(\vec{b}.\vec{r})\vec{a}.$$

3. Ротон:

$$\vec{v}_{\text{рот.}} = \vec{c} \times \vec{r}.$$

4. Стресон:

$$\vec{v}_{\text{ст.}} = (\vec{a}.\vec{b})\vec{r} - \frac{3}{2}\left[(\vec{a}.\vec{r})\vec{b} + (\vec{b}.\vec{r})\vec{a}\right].$$

2.6. МОДЕЛИРАНЕ НА НЯКОИ СТАЦИОНАРНИ СТОКСОВИ ТЕЧЕНИЯ, ПОРОДЕНИ ОТ ТВЪРДА СФЕРИЧНА ЧАСТИЦА

а) Транслационно движение на твърда сферична частица. Да предположим, че твърда сферична частица с радиус a се движи транслационно във вискозен флуид с постоянна скорост $\vec{U}$. Вземаме две фундаментални решения на уравненията на Стокс – Стокслет и изроден квадрапол. Те удовлетворяват граничното условие в безкрайност $\vec{v} \to \vec{0}$ при $|\vec{r}| \to \infty$. Ако запишем скоростта $\vec{v}$ на смутеното от движение на частицата течение във вида

$$\vec{v} = 6\pi\mu a\vec{U}.\left(1 + \frac{a^2}{6}\nabla^2\right)\frac{B(\vec{r})}{8\pi\mu}, \tag{2.6.1}$$

ще бъде удовлетворено и граничното условие върху повърхнината на частицата $r = a$. Наистина от

$$B_{ij}(a) = \frac{\delta_{ij}}{a} + \frac{x_i x_j}{a^3},$$

$$\frac{a^2}{6}\nabla^2 B_{ij}\lceil_{r=a} = \frac{a^2}{6}\left(\frac{2}{a^3}\delta_{ij} - \frac{6}{a^5}x_i x_j\right) = \frac{\delta_{ij}}{3a} - \frac{x_i x_j}{a^3}$$

следва

$$B_{ij}(a) + \frac{a^2}{6}\nabla^2 B_{ij}\lceil_{r=a} = \frac{4}{3a}\delta_{ij}.$$

Това означава, че за скоростта върху повърхността на частицата имаме

$$\vec{v}\lceil_{r=a} = 6\pi\mu a\vec{U}\left(1 + \frac{a^2}{6}\nabla^2\right)\frac{B(a)}{8\pi\mu} = 6\pi\mu a\vec{U}\frac{4}{3a}\cdot\frac{1}{8\pi\mu} = \vec{U}.$$

Следователно действително транслационното движение на твърда сферична частица във вискозен флуид може да се моделира посредством стокслет и изроден квадрапол.

б) Ротационно движение на твърда частица. Да предположим, че твърда сферична частица с радиус a извършва ротационно движение с ъглова скорост $\vec{\omega}$ във вискозен флуид, който се върти в безкрайност със скорост $\vec{\Omega}^{\infty} \times \vec{r}$.

С непосредствена проверка установяваме, че за антисиметричната част на стоксовия дипол при $r = a$ е валидно равенството

$$\frac{1}{2}(B_{ij,k} - B_{ik,j}) = \frac{1}{a^3}(\delta_{ik}x_j - \delta_{ij}x_k).$$

Тогава смутената скорост на въртящия се в безкрайност флуид може да бъде записана във вида

$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{r}) - \vec{\Omega}^{\infty} \times \vec{r} &= -4\pi\mu a^3[\varepsilon.(\vec{\Omega}^{\infty} - \vec{\omega}).\nabla]\frac{B(\vec{r})}{8\pi\mu}\\ &= a^3(\vec{\Omega}^{\infty} - \vec{\omega}) \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = (\vec{\omega} - \vec{\Omega}^{\infty}) \times \frac{a^3}{r^3}\vec{r}.\end{aligned}$$

Този резултат съответства на известното решение за въртяща се сфера във въртящ се флуид [1].

в) Обтичане на сферична частица от чисто деформационен поток. От кинематиката на движението на флуидите е известно, че формулата на Коши – Хелмхолц за разпределение на скоростите във флуидно течение се записва така:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \mathrm{grad}\ F + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

където $\vec{v}_0$ е транслационната скорост на произволна точка O, $\vec{\omega} \times \vec{r}$ е ротационното движение на флуида, а grad F $(F = \frac{1}{2}e_{ij}x_i x_j)$ характеризира деформационното му движение. Освен това за компонентите e_{ij} на тензора на скоростта на деформацията имаме

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Можем да обтичаме дадена частица с различни видове течения — например с течение с равномерна скорост $\vec{U} = \mathrm{const}$, с просто градиентно течение $v_1 = Gx_2$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ или градиентно течение от вида $\vec{v} = E^\infty.\vec{r}$ $(v_i \doteq E^\infty_{ij} x_j)$, където $E^\infty_{ij} = \mathrm{const}$. В последния случай се казва, че частицата се обтича от чисто деформационното течение $\vec{v}^{\,\infty} = E^\infty.\vec{r}$.

Оказва се, че обтичането на сферична частица от чисто деформационно течение може да се моделира, като се комбинират симетричната част на стоксовия дипол (т. е. стреслет) и октапол. Може да се докаже, че търсената скорост има вида

$$\vec{v} - E^\infty.\vec{r} = \frac{20}{3}\pi\mu a^3 (E^\infty.\nabla)\left(1 + \frac{a^2}{10}\nabla^2\right)\frac{B(\vec{r})}{8\pi\mu}.$$

Понеже е съставен от фундаментални решения, този израз удовлетворява уравнението на Стокс. Освен това при $\vec{r} \to \infty$ дясната страна на това равенство клони към нула, което означава, че е удовлетворено граничното условие в безкрайност. За да докажем, че е удовлетворено и граничното условие върху частицата $(\vec{v}(a) = \vec{0})$, след известни пресмятания установяваме, че дясната страна на това равенство при $r = a$ е равна на $F^\infty.\vec{a}$.

2.7. МОДЕЛИРАНЕ НА СТАЦИОНАРНО ТЕЧЕНИЕ, ПОРОДЕНО ОТ ДВИЖЕНИЕ НА ФЛУИДНА ЧАСТИЦА

Съществува съществена разлика между решаването на задачи от движение на флуидни частици във вискозен флуид в сравнение с аналогичните задачи за твърди частици. Това се дължи на разликата в граничните условия за двата вида частици. Когато флуидните частици са капки, трябва да се решава както външна, така и вътрешна за частицата задача. Това се отразява и на интегралното представяне на решението на уравнението на Стокс. Докато при твърдите частици в израза за смутената скорост участва само потенциалът на простия слой, то при флуидните частици освен него участва още и потенциалът на двойния слой. За смутената скорост на течения, породени от движение на флуидни частици във вискозен флуид, също съществува многополюсно разлагане чрез монополи, стоксови диполи, стоксови квадраполи и т. н. Следователно разлика в многополюсните разлагания за флуидните и твърдите частици ще има само в коефициентите на тези разлагания, т. е. във функционалния вид на силата, момента, стреслета и другите моменти.

Аналог на стокслета при вътрешните течения е стоксонът, който има скоростно поле

$$v_i = H_{ij} U_j, \quad H_{ij} = 2\delta_{ij} r^2 - x_i x_j. \tag{2.7.1}$$

И тук както при твърдите частици смутената скорост на флуида е линейна функция на скоростта на движение $(\vec{U} = \overrightarrow{\mathrm{const}})$ на флуидната частица.

Оказва се, че решението за транслационно движение на флуидна частица може да се конструира, като се използва 1) стокслет и 2) изроден квадрапол — за външното течение, и 1) стоксон и 2) равномерно течение — за вътрешното течение. Скоростните полета вътре и вън от флуидната частица (капката) търсим съответно във вида

$$\vec{v}^{(i)} = D_0\vec{U} + D_2 a^{-2}\vec{U}.H(\vec{r}), \tag{2.7.2}$$

$$\vec{v}^{(0)} = \frac{3a}{4}\vec{U}.(C_0 + C_2 a^2\nabla^2)B(\vec{r}), \tag{2.7.3}$$

където C_0, C_2, D_0 и D_2 са неизвестни констати.

Изразите за скоростта (2.7.2) и (2.7.3) удовлетворяват условията в безкрайност и при $r = 0$. Граничните условия на разделителната повърхност S иа флуидната частица се разделят на кинематични и динамични. Кинематичните условия имат вида

$$\vec{v}^{(0)}.\vec{n} = \vec{U}.\vec{n}.$$
$$\vec{v}^{(i)}.\vec{n} = \vec{U}.\vec{n},$$

а динамичните —

$$(I - \vec{n}.\vec{n}).\vec{v}^{(0)} = (I - \vec{n}\vec{n}).\vec{v}^{(i)},$$
$$(I - \vec{n}\vec{n}).(E^{(0)}.\vec{n}) = k(I - \vec{n}\vec{n})(E^{(i)}.\vec{n}).$$

Тук I е единичен тензор, $\vec{n}$ — нормален към S единичен вектор, а $k = \dfrac{\mu^{(i)}}{\mu^{(0)}}$ е отношението на вискозитетите вътре и вън от капката.

Операторът

$$\Delta \equiv I - \vec{n}.\vec{n},$$

стоящ пред вектора $\vec{v}$, проектира този вектор върху тангенциалната към S равнина, защото е в сила равенството

$$\vec{v} = \vec{v}.\vec{n}.\vec{n} + \vec{v}.(I - \vec{n}.\vec{n}) = v_n\vec{n} + (I - \vec{n}.\vec{n}).\vec{v}.$$

Като използваме кинематичните и динамичните условия на разделителната повърхнина $r = a$, можем да намерим иеизвестните константи. Така за константите C_0 и C_2 намираме

$$C_0 = \frac{2 + 3\lambda}{3(1 + \lambda)}, \qquad C_2 = \frac{\lambda}{6(1 + \lambda)}.$$

3. НЕСТАЦИОНАРНИ СТОКСОВИ ТЕЧЕНИЯ

Нестационарното уравнение (1.2), в което $\vec{F}$ е концентрирана сила, също има фундаментални (сингулярни) решения. Ако в това уравнение положим $\vec{v} = \hat{\vec{v}}\exp(-i\omega t)$, $p = \hat{p}\exp(-i\omega t)$, получаваме

$$-i\omega\rho\hat{\vec{v}} = -\nabla\hat{p} + \mu\nabla^2\hat{\vec{v}}. \tag{3.1}$$

Като изберем характерна дължина d, характерна скорост U и обезразмерим уравнението (3.1), ще имаме

$$\lambda^2\hat{\vec{v}} = -\nabla\hat{p} + \nabla^2\hat{\vec{v}}, \tag{3.2}$$

където

$$\lambda^2 = -i\frac{\omega d^2}{\nu} = -iM^2.$$

Както и в стационарния случай тук скоростта $\vec{v}$ удовлетворява уравнението на непрекъснатостта (2.2) и налягането е хармонична функция.

3.1. ФУНДАМЕНТАЛНИ РЕШЕНИЯ НА НЕСТАЦИОНАРНОТО УРАВНЕНИЕ НА СТОКС

Външни осцилиращи течения. Основното фундаментално решение при осцилиращите външни течения е осцилиращият стокслет, който има вида

$$\hat{v}_i = \frac{1}{8\pi}B_{ij}^{(H)}a_j, \quad B_{ij}^{(H)} = \frac{\delta_{ij}}{r}A_1(R) + \frac{x_ix_j}{r^3}B_1(R), \tag{3.1.1}$$

където

$$A_1 = 2e^{-R}\left(1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}\right) - \frac{2}{R^2},$$

$$B_1(R) = -2e^{-R}\left(1 + \frac{3}{R} + \frac{3}{R^2}\right) + \frac{6}{R^2},$$

$R = \lambda r$, $\lambda = (1+i)M$, а a_j $(j = 1, 2, 3)$ са проекциите на даден постоянен вектор $\vec{a}$.

Като се използва правилото на Лопитал, лесно се показва, че при $\omega = 0$ лесно се получава стационарният тензор на Озин — Бюргерс B от нестационарния $B^{(H)}$ (при $A_1(0) = B_1(0) = 1$).

Ако разложим $B^{(H)}$ в тейлоров ред около точката $R = 0$, получаваме

$$B^{(H)} = B - \frac{4}{3}\lambda I + \frac{R^2}{4}\left(\frac{3}{r}I + \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)}{r^3} + \cdots\right), \tag{3.1.2}$$

където B е тензорът на Озин – Бюргерс в стационарния случай, а I — единичният тензор с компоненти δ_{ij}. Разлагайки $B^{(H)}$ за големи стойности на R, намираме

$$B^{(H)} = \frac{2}{\lambda^2}\left(-\frac{I}{r^3} + 3\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)}{r^5}\right) + \cdots \tag{3.1.3}$$

При големи стойности на ω (т. е. на $|\lambda|$) осцилиращият стокслет поражда потенциално течение, като изразът в скобите на (3.1.3) се нарича стационарен потенциален дипол.

Осцилиращият дипол има скорост, която се записва във вида

$$\hat{v}_i = \frac{1}{4\pi}D_{ij}^{(H)}a_j,$$

където

$$D_{ij}^{(H)} = -\frac{\delta_{ij}}{r^3}C_1(R) + 3\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)}{r^5}D_1(R),$$

$$C_1(R) = e^{-R}(1 + R + R^2), \quad D_1 = e^{-R}\left(1 + R + \frac{R^2}{3}\right).$$

Очевидно $C_1(0) = D_1(0) = 1$. Ако разложим осцилиращия дипол, при малки R получаваме

$$D^{(H)} = D - \frac{1}{2}\lambda^2 B + \cdots,$$

където D е потенциален дипол, а B е стационарният стокслет.

Както в стационарния случай и тук чрез диференциране на основното фундаментално решение могат да се получат други фундаментални решения като осцилиращ стреслет, ротлет, стоксов квадрапол, октапол и т. н.

Вътрешни осцилиращи течения. Вътрешните осцилиращи течения се характеризират с това, че те са сингулярни в безкрайност и регулярни в началото. Осцилиращият стоксон, който е аналог на стационарния стоксон, се дефинира чрез равенството

$$\hat{v}_i = E_{ij} a_j,$$

където

$$E_{ij} = 2\delta_{ij} r^2 Q_1(R) + x_i x_j W(R),$$

$$Q_1(R) = -\frac{R^5}{4}[20R^3 - 30(R^2+1)\operatorname{sh} R - 30R \operatorname{ch} R],$$

$$W_1(R) = \frac{15}{R^5}[(R^3+3)\operatorname{sh} R - 3R \operatorname{ch} R].$$

Може да се покаже, че $Q_1(0) = W_1(0) = 1$. Интересно е да се отбележи, че ако се постави в центъра на сфера осцилиращ стоксон, за проекциите на вектора на напрежението върху повърхността на сферата имаме

$$t_i = T_{ij}\hat{\vec{n}}_j = \left[\delta_{ij} r G_1(R) + \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)}{r} J_1(R)\right] a_j,$$

където

$$G_1(R) = \frac{15}{R^5}[R(R^2+6)\operatorname{ch} R - 3(R^2+2)\operatorname{sh} R],$$

$$J_1(R) = -10 - \frac{15}{R^5}[R(R^2+18)\operatorname{ch} R - 7(R^2+18)\operatorname{sh} R].$$

3.2. ОБОБЩЕНА ТЕОРЕМА НА ЛОРЕНЦ. ИНТЕГРАЛНО ПРЕДСТАВЯНЕ И МНОГОПОЛЮСНО РАЗЛАГАНЕ НА СКОРОСТТА

а) Обобщена теорема на Лоренц. За нестационарните стоксови течения може също да се изведе обобщена теорема на Лоренц, която се отнася за две течения със скорости и напрежения съответно $(\hat{v}_1, \hat{T}_1)$ и $(\hat{v}_2, \hat{T}_2)$. Тя гласи

$$\iint_S \vec{\hat{v}}_1.(\hat{T}_2.\vec{n})\, d\sigma + \iiint_V \vec{\hat{v}}_1.(\nabla.\hat{T}_2)\, d\tau = \iint_S \vec{\hat{v}}_2.(\hat{T}_1.\vec{n})\, d\sigma + \iiint_V \vec{\hat{v}}_2.(\nabla.\hat{T}_1)\, d\tau.$$

б) Интегрално представяне на скоростта. Аналогично на интегралното представяне на скоростта при стационарните стоксови течения се извежда и формула за интегрално представяне на скоростта при нестационарните стоксови течения. Тя има вида

$$\vec{\hat{v}} = -\frac{1}{8\pi}\iint_{S_p}(\hat{T}.\vec{n}).B^{(H)}(\vec{r}-\vec{\rho})\, d\sigma(\vec{\rho}) - \iint_{S_p}\vec{\hat{v}}.\left[\Sigma^{(H)}(\vec{r}-\vec{\rho}).\vec{n}\right]\, d\sigma(\vec{\rho}).$$

Тук Σ е тензор от трети ранг, характеризиращ напрежението, породено от скоростта $B_{ij}^{(H)}(\vec{r}-\vec{\rho})$ на осцилиращия стокслет, намиращ се в точката с радиус-вектор $\vec{\rho}$.

в) Многополюсно разлагане на скоростта. Като разложим в ред на Тейлър около точката $\vec{\rho} = \vec{0}$ тензора на Озин – Бюргерс за нестационарните стоксови течения, получаваме

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(H)}(\vec{r}-\vec{\rho}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\vec{\rho}.\nabla)^n B_{ij}^{(H)}(\vec{r}) \\ &= B_{ij}^{(H)}(\vec{r},0) - \xi_k\frac{\partial B_{ij}^{(H)}(\vec{r})}{\partial x_k} + \xi_k\xi_l\frac{\partial^2 B_{ij}^{(H)}(\vec{r})}{\partial x_k \partial x_l} + \cdots \end{aligned}$$

Първият член в това равенство отговаря на осцилиращия стокслет, вторият — на осцилиращия дипол, третият — на осцилиращия квадрапол и т. н. Тъй като проблемите, свързани с осцилиращите мултиполи, започнаха да се разработват през последните няколко години, получените резултати са много ограничени. Ще разгледаме някои от изследваните модели.

3.3. МОДЕЛИРАНЕ НА НЕСТАЦИОНАРНО СТОКСОВО ТЕЧЕНИЕ, ПОРОДЕНО ОТ ОСЦИЛИРАЩА ТВЪРДА СФЕРИЧНА ЧАСТИЦА СЪС СКОРОСТ $\hat{U}e^{-i\omega t}$

Проблемът е да се намери такава линейна комбинация на някои от изброените фундаментални решения на нестационарното уравнение на Стокс, за която ще бъдат удовлетворени следните гранични условия на разглежданото течение:

(3.3.1) $$\hat{v} = \hat{U}, \quad r = a,$$

(3.3.2) $$\hat{v} \to 0, \quad r \to \infty,$$

(3.3.3) $$\hat{p} \to p_0, \quad r \to \infty.$$

Да вземем в центъра на сферичната частица осцилиращ стокслет $B_{ij}^{(H)}(\vec{r})$ и осцилиращ квадрапол $\nabla^2 B_{ij}^{(H)}(\vec{r})$, т. е. да образуваме линейната комбинация

$$\hat{v} = 6\pi\mu a\hat{U}(C_0 + C_2 a^2\nabla^2)\alpha\hat{B}(\vec{r}),$$

където $\alpha = -i\dfrac{\omega}{\nu}$, а C_1 и C_2 са произволни константи. От граничните условия (3.3.1) и (3.3.2) получаваме системата

$$\begin{aligned} &6C_0 - (6 + 6\lambda + 2\lambda^2)e^{-\lambda}(C_0 + \lambda^2 C_2) = 0,\\ &-C_0 + (1 + \lambda + \lambda^2)e^{-\lambda}(C_0 + \lambda C_2) = 0. \end{aligned}$$

Като я решим, намираме

$$C_0 = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{3}, \quad C_2 = \lambda^{-2}(e^{\lambda} - C_0).$$

Ако означим с $\hat{F}e^{-i\omega t}$ силата на съпротивлението, за $\hat{F}$ ще имаме

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \iint_{S_p} \hat{T}.\vec{n}\, d\sigma = \iiint_{V_p} \nabla.\hat{T}\, d\tau = \iiint_{V_p} [-6\pi\mu a C_0 \hat{U}\delta(\vec{r}) + \mu\alpha^2\hat{U}]\, d\tau \\ &= -6\pi\mu a\left[C_0 - \frac{2}{9}(\alpha a)^2\right]\hat{U} = -6\pi\mu a\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{9}\right)\hat{U}. \end{aligned}$$

3.4. МОДЕЛИРАНЕ НА РОТАЦИОННО ОСЦИЛИРАЩА ТВЪРДА СФЕРИЧНА ЧАСТИЦА ВЪВ ВИСКОЗЕН ФЛУИД

Ако ротационната скорост на частицата е $\hat{\vec{\omega}}e^{-i\omega t} \times \vec{r}$, може да се използва само ротационен ротлет

(3.4.1) $$\hat{v} = (\hat{M}.\nabla)\frac{B(\vec{r})}{8\pi\mu}.$$

Тогава, ако

$$M_{ij} = \varepsilon_{ijk}\hat{\omega}_k \frac{4\pi\mu a^3 e^{\lambda}}{1 + \lambda}.$$

то

(3.4.2) $$\begin{aligned} \hat{M}_i &= \iint_{S_p} \varepsilon_{ijk} x_j (\hat{T}.\vec{n})_k\, d\sigma = -\varepsilon_{ijk} C_0(\lambda) e^{-\lambda} M_{jk} \\ &= -8\pi\mu a^3 \frac{1 + \lambda + \frac{1}{3}\lambda^2}{1 + \lambda}\,\hat{\omega}_i, \end{aligned}$$

където ε_{ijk} е символът на Леви–Чивита.

3.5. МОДЕЛИРАНЕ НА ТЕЧЕНИЕ, ПОРОДЕНО ОТ ОСЦИЛИРАЩА СФЕРИЧНА ЧАСТИЦА

Нека сферична флуидна частица осцилира със скорост

$$\vec{v} = \vec{\hat{U}} e^{-i\omega t}$$

в неподвижен вискозен флуид. Имаме две течения — вън и вътре във флуидната частица.

Граничните условия при $r = a$ са:

$$\left.\begin{aligned} &(3.5.1) \qquad \vec{n}.\vec{v}^{(0)} = \vec{n}.\vec{\hat{U}} \\ &(3.5.2) \qquad \vec{n}.\vec{v}^{(i)} = \vec{n}.\vec{\hat{U}} \end{aligned}\right\} \text{кинематични гранични условия,}$$

$$\left.\begin{aligned} &(3.5.3) \qquad (I - \vec{n}.\vec{n}).\vec{v}^{(0)} = (I - \vec{n}.\vec{n}).\vec{v}^{(i)} \\ &(3.5.4) \qquad (I - \vec{n}.\vec{n}).(\hat{T}^{(0)}.\vec{n}) = (I - \vec{n}.\vec{n})(\hat{T}^{(i)}.\vec{n}) \end{aligned}\right\} \text{динамични гранични условия.}$$

За моделиране на външното течение полагаме

$$\vec{v}^{(0)} = \frac{3\lambda}{4}\vec{\hat{U}}.(C_0 + C_2\lambda^2\nabla^2)B_{ij}^{(H)}.$$

Вътрешното течение търсим във вида

$$\vec{v}^{(i)} = D_0\vec{\hat{U}} + D_2(\nabla\vec{\hat{U}}.\nabla - \vec{\hat{U}}\nabla^2)\frac{\operatorname{sh} r}{r}.$$

От граничните условия (3.4.1)–(3.4.4) получаваме следната система от четири уравнения за константите C_0, C_2, D_0 и D_2:

$$\left|\begin{aligned} &C_0 - (1+\lambda)X = \frac{\lambda^2}{3} \\ &D_0 + (2\operatorname{th}\lambda - 2\lambda)Y = 0 \\ &-C_0 + (1+\lambda+\lambda^2)X - \frac{2}{3}\lambda^2 D_0 + \frac{2}{3}\lambda^2(\lambda^2\operatorname{th}\lambda - \lambda\operatorname{th}\lambda)Y = 0 \\ &9C_0 - \frac{3}{2}(6+6\lambda+3\lambda^2+\lambda^3) - \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(0)}}\lambda^2[(6+3\lambda^2)\operatorname{th}\lambda - 6\lambda - \lambda^3]Y = 0, \end{aligned}\right.$$

където $X = e^{-\lambda}(C_0 + \lambda^2 C_2)$, $Y = D_2\dfrac{\operatorname{ch}\lambda}{\lambda^3}$.

Като решим тази система, намираме

$$C_0 = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{3} - \frac{(1+\lambda)^2 f(\lambda)}{D(\lambda,k)}, \qquad k = \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(0)}},$$

$$C_2 = \lambda^{-2}(e^\lambda - C_0) - \frac{e^\lambda - (1+\lambda)}{\lambda^2}\cdot\frac{(1+\lambda)f(\lambda)}{D(\lambda,k)},$$

$$D_0 = 1 - \frac{(1+\lambda)(3\operatorname{th}\lambda - 3\lambda)}{D(k,\lambda)},$$

$$D_2 = \frac{3\lambda^3\operatorname{sech}\,\lambda(1+\lambda)}{2D(\lambda,k)},$$

където

$$f(\lambda) = \lambda^2 \operatorname{th}\lambda - 3\lambda + 3\operatorname{th}\lambda,$$
$$D(\lambda, k) = k[\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{th}\lambda - 2f(\lambda)] + (\lambda + 3)f(\lambda).$$

При фиксирано $k = \dfrac{\mu^{(i)}}{\mu^{(0)}}$ и малки честоти на осцилации $\lambda = (1+i)a\sqrt{\dfrac{\omega}{2\nu}}$, т. е. при малки ω получаваме

$$C_0 = \frac{2+3k}{3(1+k)}\left[1 + \frac{2+3k}{3(1+k)}\lambda\right] + O(\lambda^2),$$
$$C_2 = \frac{k}{6(1+k)}\left[1 + \frac{2+3k}{3(1+k)}\lambda\right] + O(\lambda^2).$$

Очевидно при $\omega = 0$, т. е. в стационарния случай, се получава решението на Адамар — Рабчински

$$C_0 = \frac{2+3k}{3(1+k)}, \quad C_2 = \frac{k}{6(1+k)}.$$

3.6. МОДЕЛИРАНЕ НА ТЕЧЕНИЕ, ПОРОДЕНО ОТ ОСЦИЛАЦИИ НА СЛАБО ДЕФОРМИРАНА СФЕРИЧНА ЧАСТИЦА ПРИ МАЛКИ ЧЕСТОТИ

Тъй като е известно стационарното течение около такава частица, може да се намери поправката $O(\lambda)$, дължаща се на нестационарността на движението.

Наистина да разгледаме интегралното представяне за твърда частица

$$\vec{v} = -\frac{1}{8\pi}\iint_{S_p}(\hat{T}.\vec{n}).B^{(H)}(\vec{r} - \vec{\rho})\,d\sigma$$

и да разложим $B^{(H)}$ по степените на λ.

От граничното условие върху повърхността S_p на частицата получаваме

$$\vec{\hat{U}} = -\frac{1}{8\pi}\iint_{S_p}(\hat{T}.\vec{n}).\left[B_0^{(H)}(\vec{r} - \vec{\rho}) - \frac{4}{3}I\lambda\right]\,d\sigma + O(\lambda^2).$$

Разлагаме напрежението $\hat{T}$ по степените на λ:

$$\hat{T} = \hat{T}_0 + \lambda\hat{T}_1 + \cdots,$$

и като вземем предвид, че

$$F_0 = -\frac{1}{8\pi}\iint_{S_p}(\hat{T}.\vec{n})\,d\sigma,$$

получаваме

$$\hat{U} - \frac{\lambda F_0}{6\pi} = -\frac{1}{8\pi}\iint_{S_p}\left[\left(\hat{T}_0 + \lambda\hat{T}_1\right).\vec{n}\right].B_0^{(H)}(\vec{r} - \vec{\rho})\,d\sigma,$$

където $\hat{T}_0$ напрежението за стационарната задача.

Това интегрално уравнение е аналогично на представянето в стационарния случай, но с ефективна скорост $\hat{\vec{U}} - \dfrac{\lambda \vec{F}_0}{6\pi}$, а не само $\hat{\vec{U}}$.

Докато в стационарния случай имаме

$$T.\vec{n} = -\frac{3}{2} S.\vec{U}; \quad \vec{F} = -6\pi\mu A.\vec{U} \quad (\text{за сфера } S = A = I),$$

при малки честоти $\omega \ll 1$ в нестационарния случай имаме

$$\hat{T}.\vec{n} = -\frac{3}{2} S.(\vec{U} + \lambda A.\vec{U}),$$

$$\vec{F} = -6\pi\mu A.(\vec{U} + \lambda A.\vec{U}),$$

а формулата на Факсен за силата на съпротивлението има вида

$$\hat{F} = 6\pi\mu a(I + \lambda A).\frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{S_p} S.\hat{v}^\infty \, d\sigma + \cdots$$

3.7. МОДЕЛИРАНЕ НА ХИДРОДИНАМИЧНИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Да моделираме взаимодействието на осцилираща концентрирана сила (осцилиращ стокслет) и твърда равнинна стена. Нека равнината $x_3 = 0$ е твърдата равнинна стена и осцилиращият стокслет се намира в точката $\vec{r}_0 = (0, 0, h)$.

Означаваме породеното от осцилиращия стокслет при наличие на равнината течение с S^w и полагаме

$$S^w(\vec{r}, \vec{r}_0) = B^{(H)}(\vec{r} - \vec{r}_0) - B^{(H)}(\vec{r} - r_0^{\text{обр.}}) + \psi(\vec{r} - r_0^{\text{обр.}}),$$

където тензорът ψ трябва да се определи така, че да бъде удовлетворено граничното условие върху равнината $x_3 = 0$.

С помощта на преобразуванието на Фурие получаваме

$$\psi_{i3} = -\frac{1}{2\pi\lambda^4} \left(\delta_{i3} \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_3} \right) F_1,$$

където

$$F_1 = \int_0^\infty (a + b) b \left[\left(1 - e^{(a-b)h} \right) e^{-ax_3} + \left(1 - e^{(b-a)h} \right) e^{-bx_3} \right] J_0(b\rho) \, db,$$

$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $a^2 = b^2 + \lambda^2$. За съответното налягане в течението имаме

$$P = -\frac{1}{2\pi\lambda^2} \frac{\partial F_2}{\partial x_3},$$

където

$$F_2 = \int_0^\infty (a + b) b \left(1 - e^{(b-a)h} \right) e^{-bx_3} J_0(b\rho) \, db.$$

При $\lambda r \to 0$ се получава стационарният случай, при който

$$F_1 = \frac{h}{2}\lambda^4(x_3 - h)\frac{1}{r} \quad \text{и} \quad F_2 = h\lambda^2 x_3 \frac{1}{r}.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Във връзка с намирането на ефективни характеристики на суспензии, емулсии и други дисперсни системи нарасна необходимостта от получаване на точни решения на гранични задачи за уравненията на Стокс. Съществуват два подхода за получаване на такъв вид решения. Първият е свързан с метода на Фурие за отделяне на променливите при решаване на стационарните и нестационарните уравнения на Стокс. Вторият се основава на т. нар. фундаментални (сингулярни) решения като стокслет, стоксов дипол, осцилиращ стокслет, осцилиращ дипол и много други мултиполи. За моделиране на течения вътре във флуидните частици се използват стоксон, ротон и др.

Проблемът при прилагането на втория подход е в избирането на такава линейна комбинация от фундаментални решения на уравненията на Стокс, за която могат да се удовлетворят граничните условия на разглежданата хидродинамична задача. Намерените чрез този подход досега решения са малко на брой и се отнасят за сферични или удължени цилиндрични частици. Много перспективен в това отношение е т. нар. метод на образите. Освен прилагането на преобразуванието на Фурие при построяването на съответна система от образи е необходима и известна изобретателност.

За намирането на решения на гранични задачи за уравненията на Стокс при произволна форма на обтичаните частици могат да се прилагат числени методи. За целта е необходимо интегрално представяне на скоростта, аналогично на даденото от Ладиженска за стационарния случай.

Използването на високоскоростни компютри в хидродинамичните изследвания силно стимулира развитието на хидродинамиката при малки числа на Рейнолдс и в частност бавното движение на твърди или флуидни частици във вискозен флуид. Голямо приложение при численото моделиране на такъв вид хидродинамични задачи получи методът на граничните интегрални елементи. Този метод позволява тримерните задачи да се преформулират като двумерни върху някакви повърхнини (например повърхнините на твърди или флуидни частици). Това може да се направи благодарение на интегралното представяне на решенията на уравненията на Стокс. От граничните условия се получават интегрални уравнения, които след това се решават числено. Трудностите при използване на този метод зависят, разбира се, от постановката на задачата. При движение — например на флуидни, а не твърди частици, трудностите са по-големи, защото при тях граничните условия са по-сложни.

В заключение ще подчертаем голямото значение на прилагането на метода на особеностите за решаване на хидродинамични задачи при малки числа на Рейнолдс и ще споменем някои нерешени нестационарни хидродинамични задачи при малки числа на Рейнолдс.

Все още не са изяснени въпросите може ли да се моделира с метода на особеностите хидродинамичното взаимодействие на:

1) осцилиращ стокслет и равнинна междуфазова граница;

2) осцилиращ стокслет и твърда сферична частица;

3) осцилиращ стокслет и флуидна частица и др.

REFERENCES

1. Lamb, H. Hydrodynamics. 6th ed., Cambridge University Press, 1932.
2. Lorentz, H. A. Versl. Kon. Akad. Wet. Amst., **5**, 1897, p. 168.
3. Oseen, C. W. Hydrodynamik. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1927.
4. Burgers, J. M. Chap. III of Second Report on Viscosity and Plasticity. Kon. Ned. Akad. Wet. Verhand, **16**, 1938, p. 113.
5. Hancock, G. — Proc. Roy. Soc. A 217, 1953, p. 96.
6. Broersma, S. — J. Chem. Phys., **32**, 1960, p. 1632.
7. Tuck, E. O. — J. Fluid Mech., **18**, 1964, p. 619.
8. Taylor, G. I. In Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, S. I. A. M. Publ., 1969.
9. Batchelor, G. K. — J. Fluid Mech., **41**, 1970, p. 545.
10. Cox, R. G. — J. Fluid Mech., **44**, 1970, p. 791.
11. Chwang, A. T., Y. T. Wu — J. Fluid Mech., **67**, 1975, p. 787.
12. Einstein, A. — Ann. Physik, **19**, 1911, p. 289.
13. Taylor, G. I. — Proc. Roy. Soc. (London) A 146, 1934, p. 501.
14. Batchelor, G. K., J. T. Green — J. Fluid Mech., **56**, 1972, p. 375, 401.
15. Stokes, G. C. — Trans. Cambridge, **9**, 1951, p. 8.
16. Basset, A. B. Treatise an Hydrodynamics. V. 2. Deighton, Bell and Co., Cambridge, 1888.
17. Buchanan, J. — Proc. London Math. Soc., **22**, 1891, p. 181.
18. Schlichting, H. — Phys. Z., **33**, 1932, p. 327.
19. Kanwal, R. P. Q. — J. Mech. Appl. Math., **8**, 1955, p. 147.
20. Lai, R. Y. S., L. F. Mocros — J. Fluid Mech., **52**, 1972, p. 1.
21. Van Dyke, M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. The Parabolic Press, Stanford, California, 1975.
22. Riley, N. — Mathematika, **12**, 1965, p. 161.
23. Zapryanov, Z., S. Stoyanova — Int. J. Multiphase Flow, **4**, 1978, p. 193.
24. Tabakova, S., Z. Zapryanov — Z. Angew. Math. and Phys., **33**, 1982, p. 436, 487.
25. Zapryanov, Z., Zh. Kozhoukharova, A. Iordanova — Z. Angew. Math. and Phys., **39**, 1988, p. 204.
26. Kovatcheva, N., Z. Zapryanov — Bulg. Akad. Sci., Theor. Appl. Mech., **2**, 1987, p. 49.
27. Kanwal, R. P. — J. Fluid Mech., **19**, 1964, p. 631.
28. Williams, W. E. — J. Fluid Mech., **25**, 1966, p. 589.
29. Batchelor, G. K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967.
30. Sy, R., E. N. Lightfoot — A. I. Ch. E. J., **17**, 1971, p. 177.

31. M o r r i s o n, F. A., M. B. S t e w a r t — J. Appl. Mech., **43**, 1976, p. 399.
32. C h i s n e l l, R. F. — J. Fluid Mech., **176**, 1987, p. 443.
33. K i m, S., P. V. A r u n c h a l a m — J. Fluid Mech., **178**, 1987, p. 535.
34. P o z r i k i d i s, C. — Phys. Fluids, A 1 (9), 1989, p. 1508.

Постъпила 05.03.1994