ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика и механика
Том 90, 1996

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques et Mecanique
Tome 90, 1996

РОСТ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ОБРАЩАЮЩИХСЯ В НОЛЬ НА АНАЛИТИЧЕСКОМ МНОЖЕСТВЕ

МАРИЯ И. МИТРЕВА

Let f be an entire function in $\mathbb{C}^n$, V be the set of its zeroes, and $n_f(z', z_n)$ be the number of zeroes of $f(z', z_n)$ in the circle $|z_n| \le t$. We construct an entire function F such that F vanishes on V and its growth is estimated in terms of $n_f(z', t)$.

Keywords: entire functions, bounds on the growth

1991/95 Math. Subject Classification: 32A15

Пусть $f(z)$ целая функция в $\mathbb{C}^n$, $X = \{z \in \mathbb{C}^n,\ f(z) = 0\}$ аналитическое множество размерности $n-1$, т. е. аналитическая гиперповерхность. Положим $u(z) = \ln|f(z)|$. Это будет плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$, стремящаяся к $-\infty$ на X, которая так же является субгармонической по каждой переменной. Для каждого $z = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ и пусть $X' = \{z' = \text{const}\} \cap X$. Пусть $n_f(z', t)$ означает число корней функции f по переменной z_n при фиксированном z' в круге радиуса t, т. е. это множество тех точек из X', для которых $|z_n| \le t$ (см. [3]). Тогда известно, что n_f задается формулой

$$n_f(z', t) = \frac{4}{2\pi} \int\limits_{|z_n| \le t} \frac{\partial^2 u}{\partial z_n \partial \bar{z}_n}\, dz_n. \tag{1}$$

Наша задача будет состоять в построении целой в $\mathbb{C}^n$ функции $F(z) \not\equiv 0$, равной нулю на X и такой, что рост $\ln|F(z)|$ по переменной z_n не превышает рост функции $n_f(z', t)$ для $t = |z_n|$.

Сформулируем основную теорему:

Теорема. *Если $f(z)$ целая функция в $\mathbb{C}^n$, X ее нулевое множество, то для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой точки $z^0 \notin X$ существует целая функция $F(z)$, для которой $\{z \in \mathbb{C}^n,\ F(z) = 0\} \supset X$, $F(z_0) \neq 0$ и*

$$\ln|F(z)| \leq C(z^0, \varepsilon, z')(1 + |z_n|^2) n_f(z', |z_n| + 2\varepsilon), \tag{2}$$

где n_f то же самое, что и выше (см. (1)), а $C(z^0, \varepsilon, z')$ функция, независящая от z_n.

Сначала докажем две леммы.

Лемма 1. *Если $f(z)$ целая функция в $\mathbb{C}^n$, n_f — дефинированная в (1) функция, считающая нулей f, то для любого $\varepsilon > 0$ существует субгармоническая по z_n функция v, такая что:*

а) *$v(z) - \ln|f(z)|$ непрерывна по z_n и равномерно по z' ограничена снизу субгармонической функцией $\alpha(z_n)$, которая равна $-\infty$ только на множестве X' при любом фиксированном z', т. е. $v(z', z_n) \geq \alpha(z_n)$, $\forall z' \in \mathbb{C}^{n-1}$.*

б) *Существует константа $C(\varepsilon)$, независящая от z' и z_n, так что*

$$v(z', z_n) \leq C(\varepsilon)|z_n|^2 n_f(z', |z_n| + \varepsilon). \tag{3}$$

Для простоты записи всюду в дальнейшем будем считать, что $n = 2$ и будем работать в пространстве $\mathbb{C}^2$ точек вида (z, w), $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Построим функцию

$$u_\varepsilon(z, w) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\mathbb{C}_\zeta} u(z, w + \zeta) \rho\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}\right) d\zeta, \tag{4}$$

где $\rho(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Это положительная, с компактным носителем $\operatorname{supp}\rho \subset \{|x| < 1\}$ функция, для которой $\int\limits_0^1 \rho(x)\,dx = 1$ и $\rho(\zeta) = \rho(|\zeta|)$, $\zeta \in \mathbb{C}$. По теореме об интегрировании субгармонических функций $u_\varepsilon(z, w)$ будет субгармонической относительно w, а ввиду дальнейшего изложения представим ее в другой вид. Зафиксируем z произвольным образом и пусть $\delta(w) = u_z(w) = u(z, w)$. Тогда

$$u_\varepsilon(z, w) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{|\zeta| = t} \delta(w + \zeta) \rho\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) d\zeta dt = \frac{2\pi}{\varepsilon^2} \int\limits_0^\varepsilon \rho\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt \int\limits_{|\zeta| = t} \frac{1}{2\pi} \delta(w + \zeta)\, d\zeta$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 \rho(x) \mathfrak{M}_\delta(w, \varepsilon x)\, dx,$$

где $\mathfrak{M}_\delta(w, \varepsilon x)$ есть среднее значение функции δ по кругу с центром в w и радиусом εx. Ввиду свойств функции ρ и субгармоничности $\delta(w)$, получаем

$$u(\varepsilon, w) - u_\varepsilon(z, w) = 2\pi \int_0^1 [\delta(w) - \mathfrak{M}_\delta(w, \varepsilon x)]\, \rho(x)\, dx \le 0.$$

Теперь потребуем, чтобы искомая функция v имела вид

$$v(z, w) = u(z, w) - u_\varepsilon(z, w) + \gamma(z, w),$$

где неизвестная функция $\gamma(z, w)$ субгармонична по w и такая, что сама $v(z, w)$ тоже субгармонична по w. Для этого достаточно чтобы

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial w \partial \bar{w}} \ge \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial w \partial \bar{w}}.$$

Поэтому дальше будем искать γ в виде

$$\gamma(z, w) = \chi(z, |w|^2), \tag{5}$$

где $\chi(z, t)$ есть выпуклая, возрастающая по t функция. От этого условия следует, что

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial w \partial \bar{w}} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} |w|^2 + \frac{\partial \chi}{\partial t} \ge \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial w \partial \bar{w}},$$

и для нас тогда достаточно чтобы

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial t}(z, t) \right|_{t = |w|^2} \ge \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial w \partial \bar{w}}. \tag{6}$$

Пользуясь формулами (1) и (3), оцениваем правую сторону (6) так:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial w \partial \bar{w}} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbf{C}_\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial \bar{w}}(z, w + \zeta) \rho\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}\right) d\zeta \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^2} \max_{u \in \mathbf{C}} |\rho(u)| \int_{|\zeta| \le |w| + \varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}(z, \zeta)\, d\zeta \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} K \frac{2\pi}{4} n_f(z, |w| + \varepsilon) = C(\varepsilon) n_f(z, |w| + \varepsilon),
\end{aligned}$$

где K и $C(\varepsilon)$ суть положительные константы, независящие от z и w. Ввиду (5) достаточно чтобы χ удовлетворяла условию

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(z, t) = C(\varepsilon) n_f(z, \sqrt{t} + \varepsilon),$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}
\chi(z, t) &= \int_0^t C(\varepsilon) n_f(z, \sqrt{s} + \varepsilon)\, ds = C(\varepsilon) \int_0^{\sqrt{t}} x n_f(z, x + \varepsilon)\, dx \\
&\le C(\varepsilon) t n_f(z, \sqrt{t} + \varepsilon),
\end{aligned}$$

или

$$\chi(z, |w|^2) \le C(\varepsilon)|w|^2 n_f(z, |w| + \varepsilon),$$

и для $\gamma(z, w)$ получаем неравенство

$$\gamma(z, w) \leqq C(\varepsilon)|w|^2 n_f(z, |w| + \varepsilon),$$

которому будет удовлетворять также и функция v. Этим проверено условие б) леммы. Условие а) следует из непрерывности функций u_ε и γ по w и из свойств инфимума субгармонических функций.

Построение искомой функции $F(z)$ основано и на следующей леммы, доказательство которой использует в существенном результаты Хермандера [2] о существовании решения $\overline{\partial}$-проблемы с оценками (см. также [1]).

Лемма 2. *Пусть $\varphi(z, w)$ является субгармонической по $w \in \mathbb{C}'$ функцией в $\mathbb{C}^n$ и при фиксированном $z \in \mathbb{C}^{n-1}$ точка $w_0 = w_0(z)$ такова, что существует $r > 0$, для которого*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^{n-1}} \int\limits_{|w - w_0| < r} e^{-\varphi(z,w)}\, dw = M < +\infty. \tag{7}$$

Тогда существует функция $F(z, w)$ со свойствами:

$$\begin{aligned}
&1)\ F(z,w) \text{ голоморфна по } w \text{ всюду при любом фиксированном } z \in \mathbb{C}^{n-1};\\
&2)\ F(z, w_0) \ne 0 \text{ для каждого фиксированного } z \in \mathbb{C}^{n-1};\\
&3)\ \sup_z \int\limits_{\mathbb{C}_w} |F(z,w)|^2 e^{-\varphi(z,w)}(1 + |w|^2)^{-3}\, dw < +\infty;\\
&4)\ F(z,w) \text{ голоморфна по } z \text{ в } \mathbb{C}^{n-1} \text{ при любом фиксированном } w \in \mathbb{C}^1.
\end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Будем считать, что после того как зафиксировали z, точка $w_0 = w_0(z)$ перешла в ноль. Это нисколько не уменьшит общность доказательства.

В плоскости $z = \text{const}$ рассмотрим множества

$$\Omega_1(z) = \{(z, w),\ |w| < r\}, \qquad \Omega_2(z) = \{(z, w),\ w \in \mathbb{C}'\}.$$

Построим функции $h_1(z, w)$, $h_2(z, w)$ со свойствами:

1) $h_i(z, w)$ голоморфны по w в $\Omega_i(z)$;

2) $h_i(z, 0) \ne 0$;

3) $\sup\limits_z \int\limits_{\Omega_i} |h_i|^2 e^{-\varphi}(1 + |w|^2)^{-3i+3}\, dw = N < +\infty$;

4) $h_i(z, w)$ при любом фиксированном w голоморфны по z;

5) $h_2(z, w) = h_1\psi(|w|^2) - wu(z, w)$, $\psi \in C_0^1(\mathbb{R})$, $\psi(t) = 0$, $|t| > r$, $\psi(t) = 1$, $|t| < r/2$, а $u(z, w)$ определена из условий 1)–4).

Такие функции существуют (например, можем положить $h_1(z,w) = a$, где $a \neq 0$ константа). Это требование обеспечивает сразу выполнение условий 2) и 4) для $h_1(z,w)$. Очевидно также, что h_1 голоморфна всюду по w и учитывая (7), имеем

$$\int\limits_{|w|<r} |h_1|^2 e^{-\varphi}(1+|w|^2)^{-3i+3}\,dw = |a|^2 \int\limits_{|w|<r} e^{-\varphi}\,dw < M < +\infty.$$

Для того, чтобы $h_2(z,w)$ выполняла условий 1)–4), необходимо подобрать функцию $u(z,w)$ так, что

$$\overline{\partial}_w h_2(z,w) = 0,$$

т. е.

$$\overline{\partial}_w u(z,w) = h_1(z,w)\psi'(|w|^2)\,d\bar{w} = a\psi'(|w|^2)\,d\bar{w}.$$

Обозначим последнее выражение через $\alpha(z,w)$, оно является дифференциальной формой типа (0, 1) по w. Очевидно для нее $\overline{\partial}_w\alpha = 0$ и она удовлетворяет оценке

$$\|\alpha\| = \int\limits_{\mathbb{C}_w} |\alpha|^2 e^{-\varphi}\,dw \leq |a|^2 C \int\limits_{|w|\leq r} e^{-\varphi}\,dw < M < +\infty,$$

где учли, что $\psi \in C_0^1(\mathbb{R})$, ее носитель содержится в круге радиуса r и в окрестности нуля выполнено (7). Тем самым мы находимся в условиях теоремы Хермандера (см. [2], теорема 4.4.2). Значит, существует функция $u \in L^2(\mathbb{C}_w, \mathrm{loc})$ такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}_w} |u|^2 e^{-\varphi}(1+|w|^2)^{-2}\,dw \leq \frac{1}{2}\|\alpha\|^2. \tag{9}$$

Тогда функция $h_2(z,w)$ будет голоморфна по w, а в силе (9), применяя для оценки неравенство Гелдера, для нее получаем

$$\int\limits_{\mathbb{C}_w} |h_2|^2 e^{-\varphi}(1+|w|^2)^{-3}\,dw \leq M + 2\sqrt{M}\sqrt{\frac{\|\alpha\|}{2}} + \frac{1}{2}\|\alpha\| < +\infty$$

с константой M, независящей от w и z.

Кроме того,

$$\overline{\partial}_z h_2(z,w) = \overline{\partial}_z u(z,w)$$

и так как $\alpha(z,w) \not\equiv 0$ принадлежит классу $L^2(\mathbb{C}_z,\varphi)$, то уравнение $\overline{\partial}_z u(z,w) = 0$ тоже имеет решение и $h_2(z,w)$ будет голоморфна и по z. Мы возьмем $F(z,w) = h_2(z,w)$, что и будет искомой функцией в силе теоремы Гартогса (см. [4]). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, пусть $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in X$. Зафиксируем $z' = z'^0 = \mathrm{const}$. Тогда, по лемме 1, существует субгармоническая по z_n функция v со свойствами а) и б). Применим лемму

2 к функции $\varphi(z', z_n)$, равной $v(z)$. Для нее выполнено (7), значит для $F(z)$ будет выполнено (8), а функция $F(z)/f(z)$, которая, вообще говоря, мероморфна по z_n, будет целой (имеет устранимые особенности). Она по своем выборе не тождественно равна нулю, а при интегрировании по z_n сохраняет аналитичность. Свойство (2) можно проверить при помощи стандартной оценки $|F|$ через ее среднее значение по шару с радиусом r.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skoda, H. Croisence des fonctions entieres s'anulant sur une hypersurface donnée de $\mathbf{C}^n$. *Lecture Notes Math.*, **275**, 1972, 82–105.
2. Хермандер, Л. Введение в теорию аналитических функций нескольких комплексных переменных. Мир, М., 1968.
3. Ронкин, Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. Наука, М., 1971.
4. Фукс, Б. А. Функции многих комплексных переменных. Наука, М., 1968.

Received on January 12, 1997
Revised on July 17, 1997

Мария Ив. Митрева
ул. Колю Фичето 6, вх. 1, ап. 7
9704 Шумен, Болгария