ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Том 97

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Tome 97

НАУЧНОТО НАСЛЕДСТВО НА ПОАНКАРЕ И СЪВРЕМЕННАТА МАТЕМАТИКА

ЕМИЛ ХОРОЗОВ

The paper discusses the main contributions of Poincare to mathematics. On the basis of his work on authomorphic functions, celestial mechanics and topology we trace his enormous influence on modern mathematics.

В историята на науката има неголям брой гении, които са оставили в наследство за поколенията не само и не толкова блестящите си резултати, а преди всичко насоките в развитието на науката за десетки и стотици години. В математиката това без съмнение са Нютон, Ойлер, Гаус,Галоа, Риман... Спокойно можем да поставим в тази редица и Поанкаре, още повече, че не е лесно да се посочи математик с по-голямо влияние върху съвременната математика от него. По-долу ще се опитам да дам някои аргументи в подкрепа на тази теза, като си давам сметка, че когато се пише и говори по повод сто и петдесет годишнината от рождението му, авторът може и да е пристрастен.

Анри Поанкаре е не само математик, но и физик и философ. (В скоби ще отбележа, че той е ученият с най-много номинации за Нобелова награда по физика в периода 1901-1912 год.) Тук, обаче, ще се спра само върху математическото му творчество, не само поради „липса на място“ , колкото поради липса на квалификация. Ясно е, освен това, че в текст като този научните описания ще бъдат опростени и повърхностни, за което се надявам специалистите да проявят разбиране.

Анри Поанкаре

В научно-философското си съчинение „Наука и хипотеза“ Поанкаре казва „Науката е изградена от факти, така както една къща е изградена от камъни, но натрупването на факти представлява толкова наука, колкото купчина камъни представлява къща.“

В този доклад ще се опитам да нахвърлям част от това, което Поанкаре е направил за подреждането и появането на камъните на науката в една постройка, както и за здравия ѝ фундамент. Ще се старая да споменавам факти, дължащи се на Поанкаре, само ако служат на тази цел. Нека специалистите, които останат с впечатление, че тяхната област е пренебрегната, ме извинят.

1. АВТОМОРФНИ ФУНКЦИИ

Първите изследвания на Поанкаре, донесли му световна слава, са изследванията му по фуксови функции (по терминологията на Поанкаре). Днес те са известни под името, дадено им от Ф. Клайн - автоморфни функции. Класът от фуксови функции според Поанкаре му е подсказан от Л. Фукс, който се опитва да изучи обикновени линейни диференциални уравнения с рационални коефициенти. В непълните и неточни работи на Л. Фукс Поанкаре намира средство да „реши всички линейни диференциални уравнения“ . Горните думи означават следното.

Поанкаре дефинира нов клас от трансцедентни функции (чрез решенията на някои класове уравнения от втори ред) и показва, че решенията на всички линейни диференциални уравнения (с алгебрични коефициенти),т.е. уравнения от вида:

$$y^n(z) + a_1(z,w)y^{n-1}(z) + \ldots + a_n(z,w)y(z) = 0, \quad (1)$$

където z, w са свързани с алгебрично съотношение $\Phi(z,w) = 0$, се представят с помощта на функции от този клас.

За да не се създаде погрешно впечатление бързам да кажа, че ролята на тези функции за диференциалните уравнения е скромна. А ролята им за цялата математика е трудно да се преувеличи. На това ще се спра по-късно. Все пак за компенсация ще припомня, че практически всяко занимание на Поанкаре е свързано по някакав начин с диференциалните уравнения. Но областта, в която работи Поанкаре не е „диференциални уравнения“ . Областта на Поанкаре е просто науката – и математика и физика, и философия. Опитите да се разглежда Поанкаре в един пласт може лесно да доведе до профанизиране на творчеството му.

Нека да се върна към автоморфните функции.

С няколко думи основните идеи, от които тръгва Поанкаре, се свеждат до следното. Разглеждаме диференциално уравнение от втори ред в комплексната област

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0.$$

с рационални коефициенти. Нека $y_1(z)$ и $y_2(z)$ са две линейно независими решения в околност на неособена точка z_0 (т.е., в която коефициентите нямат полюси). Можем да продължаваме тези решения по всеки път в комплексната област. Интересен е случаят, когато пътят обикаля *особена точка* z_1 и се връща в неособената точка z_0. Двойката линейно-независими решения $y_1(z)$ и $y_2(z)$ преминава в друга двойка линейно-независими решения $w_1(z)$ и $w_2(z)$. Последните се изразяват като линейна комбинация на $y_1(z)$ и $y_2(z)$:

$$w_1(z) = \alpha y_1(z) + \beta y_2(z) \tag{2}$$
$$w_2(z) = \gamma y_1(z) + \delta y_2(z) \tag{3}$$

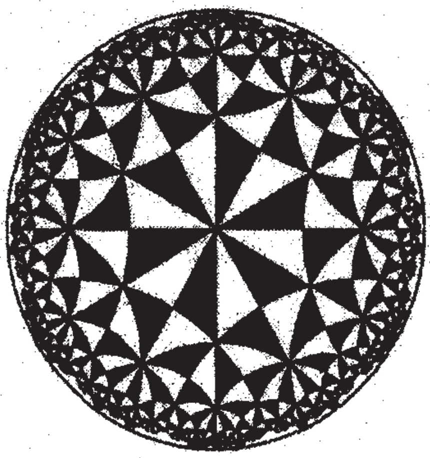
Но оттук следва, че отношението $w = w_1(z)/w_2(z)$ е дробно-линейна функция на отношението $y = y_1(z)/y_2(z)$:

$$w = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$$

С други думи при обикаляне около особената точка z_1 величината y претърпява дробно-линейна трансформация. Всички такива дробно-линейни трансформации образуват група G, която е дискретна подгрупа на $SL(2, \mathbb{C})$. А сега да разгледаме функцията $z(y)$, която е обратна на $y(z)$. Ясно е, че при смяна на y с $w = \Gamma(y)$, където Γ е дробно-линейна трансформация от групата G.

На това място е полезна аналогия с понятието периодична функция върху реалната права. При нея, ако знаем значението на функцията в интервал с дължина един период, функцията се възстановява върху цялата права. А именно с движения с дължина периода или кратни на периода можем да пренасяме графиката на функцията. Същото важи за елиптичните функции, т.е. двойно-периодичните мероморфни функции. Защо казвам тези тривиални неща? Защото класът от функции, открит от Поанкаре, е обобщение именно в тази плоскост. Преди това Фукс е стигнал до това, че някои функции, построени чрез решенията на линейни диференциални уравнения от втори ред, би трябвало да имат свойството, че ако в аргумента им направим дробно-линейна трансформация, принадлежаща на подходяща група, свързана с диференциалното уравнение, функцията не се променя. Но къде са дефинирани, дали са еднозначни, какви свойства имат и др. за Фукс не е ясно.

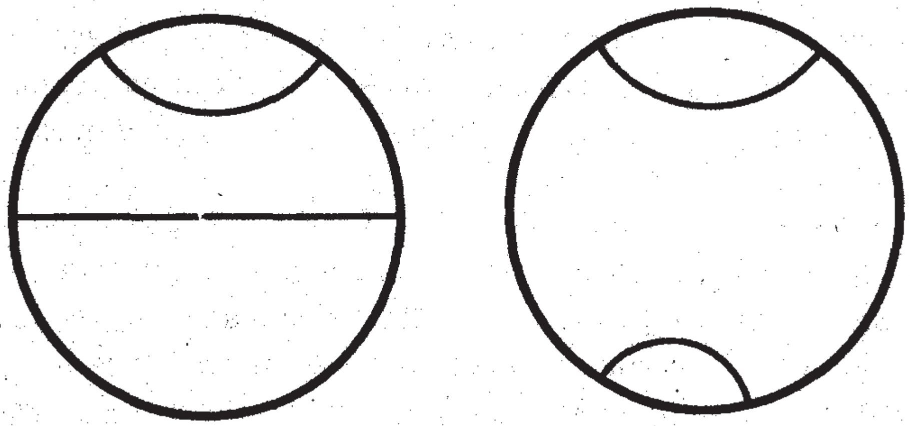
При търсенето на съответния аналог Поанкаре стига до едно забележително откритие – дробно-линейните трансформации, които изпращат единичния кръг в себе си, могат да се интерпретират като *движения в геометрията на Лобачевски*. До това всъщност просто заключение Поанкаре стига чрез работите си по квадратични форми – т.е. по теория на числата! Поанкаре намира и аналог на понятието „интервал с дължина период" . Той получава названието *фундаментална област* (Виж фиг. 1, на която всеки триъгълник е фундаментална област).



Фиг. 1. Единичният кръг, разбит на фундаментални области

Както при пренасянето на интервал върху реалната права можем да получим цялата права без да има застъпване на образите (освен в краищата), така и тук при пренасянето (но сега в геометрията на Лобачевски) на фундаменталната област можем да покрием напълно единичния кръг, но без образите да се застъпват. Тук обаче, за разлика от групите от дискретни движения върху реалната права, дискретните групи не се определят лесно. Нещо повече: това е следващия проблем, с който се сблъсква Поанкаре. Но за него няма да говоря.

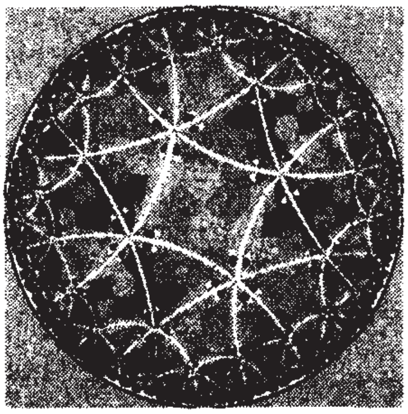
Така се появява едно от откритията на Поанкаре – този път в хиперболичната геометрия на Лобачевски. То носи названието модел на Поанкаре. В него правите са или диаметри или окръжности, перпендикулярни на единичната окръжност (фиг. 2).



Фиг. 2. Модел на Поанкаре

Добре е да припомня, че след Лобачевски и преди Поанкаре хиперболичната геометрия няма кой знае какво развитие. Тя е по-скоро екзотична област. Напротив, с модела на Поанкаре и с изследванията на Поанкаре (и Клайн) по автоморфни функции, тя става централен обект в математиката, какъвто е и сега.

Тук си струва да припомня творчеството на един от най-известните художници на 20 век - Мауритс Ешер. Предполагам, че някои от вас са виждали копия или може би оригинали на неговите рисунки. Но може би не много знаят, че знаменитата му серия - Circle limit (гранична окръжност, виж напр. [4]) е повлияна именно от модела на Поанкаре (фиг.3). Дори думата „повлияна" е неточна – Ешер е изучавал с детайли модела, включително и с помощта на известния математик Кокстер. Рисунките са правени след внимателни пресмятания на базата на този модел.



Фиг. 3. Circle limite 1

Характерното за творчеството на Поанкаре е, че той не решава конкретно поставени задачи. Поанкаре изследва природата, иска да разбере философията на света. Като правило той няма хитроумни разсъждения. Дори конкретните си резултати той извлича след намирането на движещия механизъм на явлението. Така е и при автоморфните функции. След намирането на връзката с хиперболичната геометрия Поанкаре сравнително лесно получава всичко останало.

Нека резюмираме. За целите на диференциалните уравнения е развита теория, основана на комплексния анализ, теорията на групите, неевклидовата геометрия. Използвани са идеи от теория на числата. Още в началото на заниманията си Поанкаре забелязва, че автоморфните функции са много полезен инструмент в изучаването на римановите повърхнини (удивително е, че Поанкаре по онова време има неособено големи познания в тази област). Например чрез теорията на автоморфните функции се получава едно от доказателствата (това на Поанкаре) на теоремата за униформизацията.

Процесът на това откритие на Поанкаре е описан подробно от самия него в книгата му „Наука и метод". Там той подчертава особено много ролята на интуицията, на безсъзнателното в научното творчество. Тъй като самонаблюденията му по тези въпроси са извънредно детайлни, той е изнасял и доклади пред Института по обща психология в Париж през 1908 г.,

Днес не можем да си представим математиката без автоморфните функции. Освен в теорията на римановите повърхнини [1] тя е съществена част и важен инструмент на теорията на числата [2]. Теорията на представянията на групи, централна област, пронизваща природо-математическите науки от аритметиката до квантовата химия, е практически невъзможна без нея [3].

На това място сигурно е подходящо да се спомене за една от най-грандиозните програми в математиката - програмата на Р. Ленглендс, свързваща теорията на числата, теорията на представянията и, разбира се, автоморфните функции. Невъзможно е тук да се даде и бегла представа за същността или значението на програмата. Но като страничен аргумент за важността ѝ ще спомена, че филдсовите лауреати – Владимир Дринфелд (за 1990) и Лоран Лафорг (за 2002), са удостоени с високата награда именно за изследвания в тази област.

Надявам се споменатото до тук да дава поне бегла представа за мястото на автоморфните функции в математиката и математическото естествознание.

2. НЕБЕСНА МЕХАНИКА

„Възможно е ключът към разбирането на творчеството на Поанкаре да дават неговите идеи в небесната механика и по-специално - в проблема за трите тела." Може би това мнение на известния историк на математиката Д. Стройк [5] да звучи преувеличено, но то подчертава широко възприетото мнение за фундаменталния характер на идеите на Поанкаре в тази област. Няма съмнение обаче, че работите на Поанкаре в задачата за трите тела са знакови за творчеството му.

Най-напред ще припомня основната задача. Обектът на изследване е движението на планетите, техните спътници, както естествени като Луната, така и изкуствени. На по-научен език задачата звучи така. Три материални (т.е с ненулева маса) точки, например Слънце, Земя и Юпитер, се движат в пространството под действието на силите на привличане помежду им по закона на Нютон. Иска се да се опише движението. Тази размита постановка не е случайна – задачата всъщност няма строга формулировка. Изследователите сами биха могли да я допълват според интересите и силите си.

За разлика от задачата за двете тела, на която всички движения могат да се опишат детайлно и класифицират, тук намирането на някое движение, например периодично, вече е голям успех. Добре е да се отбележи, че задачата съдържа практически всички трудности присъщи на механични задачи и специално на задачи за много тела.

Като правило специалистите считат за главен резултат на Поанкаре в тази област доказателството за неинтегрумост на задачата за трите тела - например Вайерщрас. Това означава, че всеки опит да се напишат формули, описващи движенията на планетите, е обречен на неуспех. Този резултат е получен в резултат на фин анализ на резултатите на неговите предшественици Линдщедт, Болин и др. (главно астрономи), които получават „решенията" във вид на безкрайни редове. Поанкаре доказва, че редовете са разходящи. Поради това той съсредоточава вниманието си върху проблеми от качествен характер. Откъде обаче да започне? От най-простото, най-естественото, както е типично за Поанкаре. Това са периодичните решения, при които планетите след известно време се връщат точно в първоначаналното си положение. „*...Особената ценност на тези решения се състои в това, че те представляват единствения жалон, по който можем да проникнем в област, считана по-рано за недостъпна.*“ - така Поанкаре мотивира обекта на изследванията си. Той обаче не се задоволява просто да намери големи класове периодични решения - и преди него има намерени такива от Ойлер, Лагранж, Хил. Поанкаре наистина иска да проникне в областта считана по-рано за недостъпна. Новите периодични решения му дават възможност да открие нови явления, далеч надхвърлящи границите на небесната механика. Ще се спра на това, което е просто нова наука.

След изучаването на периодичните решения Поанкаре прави следващата стъпка – да разбере какви решения са свързани с тях по някакъв начин. Най-интересните се оказват решения, при които с течение на времето планетната система все повече се приближава до периодично движеща се, но освен това преди голям интетервал от време е приличала на същата периодична система. Тези решения са наречени от Поанкаре двойно-асимптотични. С тях завършва и тритомният трактат на Поанкаре „Нови методи в небесната механика“ , заемащ над 1000 страници.

При доказването на тяхното съществуване Поанкаре се сблъсква с ново явление. Не мога да се въздържа от цитирането на знаменит пасаж от съчинението на Поанкаре.

Фиг. 4. Хаос

„*Оставаш поразен от сложността на тази фигура, която даже не се опитвам да изобразя. Нищо не е по-подходящо за да ни даде представа за сложността на задачата на трите тела и въобще на задачите на динамиката, в която няма еднозначни интеграли и в която редовете на Болин са разходящи.*“

Специалистите вече са се досетили, че става дума за откриването на хаоса. Оказва се, че повечето движения всъщност не могат **принципиално** да се опишат индивидуално, и съвсем не заради нашето неумение – такава им е природата. Те трябва да се изучават в тяхната съвкупност, а не поотделно. Затворената обвивка на такова решение може да е множество с размерност по-голяма от едно. Днес теорията на хаоса е сред най-активно развиващите се области с много приложения – сред тях например са метеорологията, химическата кинетика и др.

Откриването на хаоса е свързано с един драматичен епизод в историята на науката и в иначе лишения от бурни събития живот на Поанкаре. Ще си позволя да го разкажа, тъй като е свързан с едно от основните съчинения на Поанкаре и с едно от откритията, които дават облика на съвременната математика (фиг. 4).

По повод 60-годишнината на краля на Швеция и Норвегия Оскар II се обявява международен конкурс *„за важно откритие в чистия математически анализ“* – това гласи съобщението в списанието Нейчър от 1885 г. Без да отивам в подробности ще припомня, че Поанкаре е бил обявен тържествено за един от двамата победители. По регламент статиите на победителите трябвало да се публикуват в едно от най-авторитетните математически списания по онова време, а и до сега - **Acta Mathematica**. При подготовката на списанието за печат младият помощник-редактор и по-късно известен математик Едвард Фрагмен открива неясни места в текста на Поанкаре и му ги съобщава. След като поправя съответните текстове обезпокоеният Поанкаре преглежда отново съчинението и открива доста по-сериозни грешки с грамадни последствия. През това време спианието вече е набрано и дори по-лошо – ограничен брой книжки са разпратени на отделни специалисти. Сред тях са членовете на журито – Вайерщрас и Ермит, астрономите - Гилден и Линдщедт, математиците Ковалевска, Ли. Поанкаре съобщава неприятните новини на председателя на журито Митаг-Лефлер. По молба на последния това остава в тайна между тях. И двамата имат сериозни врагове – сред тях са знаменитият математик Кронекер или маститият астроном Гилден, директор на стокхолмската обсерватория. За кратко време, около 2 месеца, Поанкаре практически написва нов труд с различни научни заключения. Погрешните твърдения на Поанкаре са водели до извода, че при планетните движения не се появяват хаотични движения. В новата редакция се появява голямото откритие на Поанкаре – съществуването на хаос в детерминирана система, в случая описвана с обикновени диференциални уравнения.

Поанкаре сам заплаща новото отпечатване на тома. Цената надвишава значително премията, получена от крал Оскар II.

А епизодът наистина остава в пълна тайна повече от сто години, до началото на деветдесетте години на 20 век, когато младата историчка на науката Джун Бароу-Грийн открива първия вариант на тома в Института Митаг-Лефлер, както и съответната кореспонденция.

Пак периодичните решения довеждат Поанкаре до открития, на които е съдено да играят основна роля в развитието на математиката и на теоретичната физика през 20-ти век. Става въпрос за топологията. Аз ще кажа нещо за топологията малко по-нататък, а сега искам да припомня части от разсъждения на Поанкаре, с които той иска да установи съществуването на периодични решения в задачата за трите тела. Със съображения от механиката той свежда задачата до въпрос за критичните точки на функция върху двумерния тор. Всяка такава функция разбира се, има поне един максимум и един минимум. Следователно, заключава Поанкаре, функцията има и поне две инфлексни точки, което в конкретния случай води до 4 периодични решения. Това сбито разсъждение от два реда съдържа позоваване на топологията на тора и по-специално

1) характеристиката на Ойлер-Поанкаре (за нея ще стане дума по-долу);

2) елементи от теорията на Морс, построена 30 години по-късно от М. Морс,

т.е. до основни въпроси от несъздадената още топология. А заедно с последната геометрична теорема (това е последната статия на Поанкаре) горните въпроси водят до създаването на симплектичната топология, появила се 70 години по-късно след серия резултати и хипотези на Арнолд, както и работите на Громов, Фльор, Хофер и др. С други думи тук срещаме освен небесната механика и серия фрагменти от различни раздели на топологията – алгебрична, диференциална, симплектична. Но както често става с работите на Поанкаре, при него трудно се отделят конкретни области.

Един въпрос , до който достигат класиците Лагранж и Лаплас е въпросът: устойчива ли е Слънчевата система? Това е типичен въпрос от тематиката на задачата за трите тела (тук те са повече). Въпросът трябва да се разбира както в обикновенния, т.е. нематематически език – пита се дали планетите няма да избягат много далече от слънцето, дали няма да се приближават произволно близко до него или помежду си. Няма трудност да се даде и точната математическа формулировка – въпросът е дали решенията остават в някаква компактна област на фазовото пространство -всяко в своя. Знаменитата теорема на Лаплас казва, че Слънчевата система е устойчива, ако се пренебрегнат квадратите на масите. Това не много ясно твърдение означава следното. В задачата за трите тела допълнително се предполага, че масата на едно от телата - Слънцето - е много по-голяма от другите маси (на планетите). Например ако масата на Слънцето е единица, то масите на планетите са хилядни части от единицата. Решенията се записват с безкрайни редове, в които участват масите. Величините, в които масите участват чрез квадратите си просто зачеркваме. Действително те (квадратите на масите) ще бъдат (за Слънчевата система) милиони пъти по-малки от единица. Друг е въпросът, че те са коефициенти пред изрази, в които участвува времето и когато то расте, пренебрегнатите членове евентулно също растат.

Поанкаре се връща към тази теорема в съвършенно друга постановка, произлизаща от Поасон, който доказва, че ако се оставят квадратите, но се пренебрегнат кубовете, Слънчевата система е отново устойчива. Тук обаче смисълът на думата „устойчива“ е доста различен. Сега новото значение е, че планетната система вечно ще се връща близо до сегашното си положение, но планетите биха могли да се отдалечават колкото искаме или да се приближават произволно близко до Слънцето или помежду си. Поанкаре доказва далеч по-силен резултат - заключението на Поасон е вярно без да се пренебрегват кубовете или които и да било степени на масите. За стойността на този резултат ще припомня, че в надгробната реч на Пенлеве той е един от малкото споменати. Припомняйки наградата на шведския крал Пенлеве казва:

„През 1889 г. при съобщението на резултата от състезанието Франция научи с гордост, че златният медал ... е даден на французин, млад учен на 35 год. за блестящото изследване на устойчивостта на слънчевата система и името на Поанкаре стана известно навсякъде.“

Средствата , с които Поанкаре получава този блестящ резултат имат далеч по-голямо значение от самия резултат. Става въпрос за знаменитата теорема на Поанкаре за възвръщането, която има горе-долу същото звучене, но за произволна механична система, а също и за теорията на интегралните инварианти. Това са все общотеоретични резултати, лежащи в основата на ергодичната теория, важни за статистическата физика, за хидромеханиката и т.н.

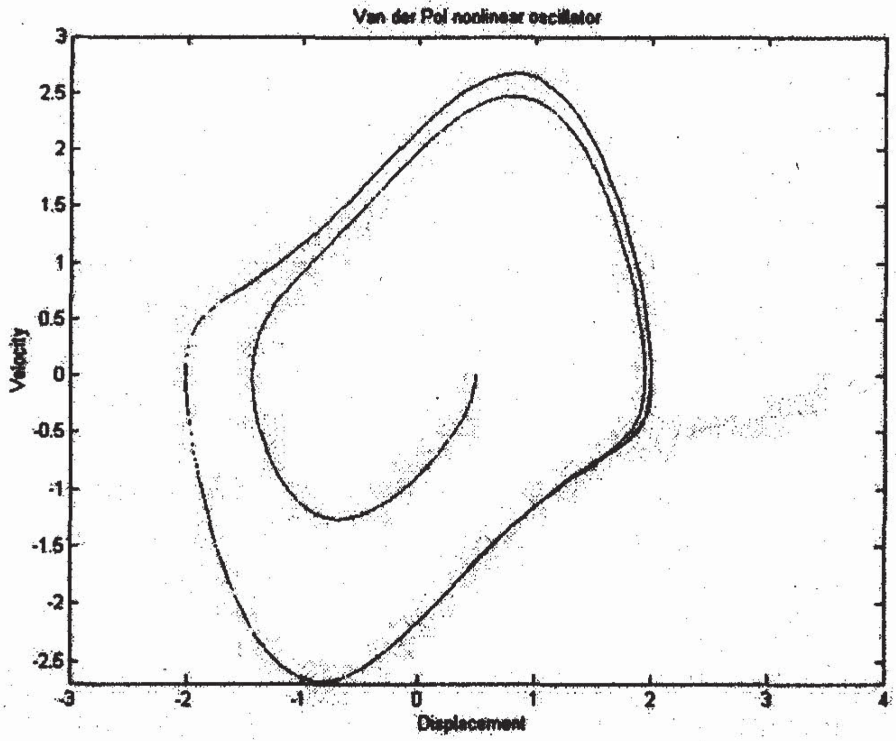
Впрочем въпросът за устойчивост на слънчевата система се оказа доста по-сложен. Въпреки огромното придвижване дължащо се на Поанкаре, въпросът на Лагранж и Лаплас трябваше да чака 70 години за да получи сравнително удовлетворителен отговор. Той е част на така-наречената КАМ-теория - по имената на Колмогоров, Арнолд и Мозер. Конкретният резултат принадлежи на тогава 25-годишния Арнолд и изказан „на пръсти“ гласи: с голяма вероятност слънчевата система е устойчива – приблизително 0.999 .

Тясно свързани с небесната механика са работите на Поанкаре по динамични системи или качествена теория, по-точно създаването й. Именно в контекста на качествената теория са голяма част от изследванията му по небесна механика – например тези по периодични решения и свързаните с тях. Далече преди Поанкаре е било ясно, че повечето диференциални уравнения не могат да се решат в никакъв смисъл. Станало е ясно, че трябва да се изучават решенията без да се решават уравнеията. Но предшествениците му (например Брио и Буке) не са имали убедителни примери. Вероятно защото не са били наясно кое е това, което трябва да се изучава. Поанкаре е успял да намери удивително прости и изключително важни геометрични обекти – фазов портрет на система, съставен от фазовите криви, т.е. кривите зададени от решенията и параметризирани с независимата променлива („времето“). За неспециалистите ще спомена, че това е изучаване на решенията в цялата им съвкупност. И тъкмо защото се въвежда геометрична картина можем да говорим за тяхното взаимно разположение. Една голяма част от тези изследвания сега е част от задължителния материал в обучението по математика не само за математици, но и за представители на други естествени науки, инженери икономисти и др.

Сред детайлите на фазовия портрет най важните са положенията на равновесие и отново периодичните решения. Последните са източник на много дълбоки и много приложни в истинския смисъл на думата изследвания – периодичните движения се срещат на всяка крачка – и в механиката и в радиотехниката и в икономиката. Например работата на радиолампата се описва с уравнението на Ван дер Пол:

$$\ddot{y} + (\mu + y^2)\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

Съответната система има фазов портрет посочен на фиг. 5.



Фиг. 5. Трептения, описвани с уравнението на Ван дер Пол

От него се вижда, че едно от решенията е устойчив граничен цикъл – изолирано периодично решение, което „привлича“ близките му решения. Един от знаменитите проблеми на Хилберт - шестнадесетият е посветен именно на периодичните решения и по-точно на „граничните цикли на Поанкаре“ .

Изследванията в небесната механика имат още много следствия и връзки. Ще засегна и една област, стояща не чак толкова близко до топологията. При изследването на приливите и отливите Поанкаре достига до задачата с тангенциална към част от границата наклонена производна за оператора на Лаплас. Самият той не е успял да постигне успех в нея. Но работата на серия учени във втората половина на 20 век по този проблем стимулираха до известна степен развитието на теорията на псевдодиференциалните оператори, теорията на интегралните оператори на Фурие, деликатни и сложни аспекти на хармоничния анализ. Много от най-видните специалисти по ЧДУ са допринесли в това направление - Бицадзе, Хьормандер, Егоров, а в по-широк план - Стайн и учениците му.

Уместно е да се спомене, че българската математика има достоен принос в тези разработки. В серия работи акад. П. Попиванов и неговата школа установиха важни резултати, от които ще спомена само последния – на Попиванов и Кутев за съществуване и единственост на вискозно решение на тази задача за напълно нелинейно елиптично уравнение.

3. ТОПОЛОГИЯ

„Всички различни пътища, върху които аз последователно се намирах, ме водеха към Analysis situs (т.е. топологията, б.а.)" - пише Поанкаре в своето „Аналитично резюме" . В увода към първата си статия по топология това наблюдение е описано подробно. Поанкаре посочва три примера от своето творчество, които мотивират създаването на топологията. Първият е от алгебричната геометрия - класификацията на комплексни криви и повърхнини. Следващият пример представляват диференциалните уравнения и специално – тези, които описват небесната механика. Накрая Поанкаре посочва проблем от теорията на групите – определяне на крайните или дискретни групи, съдържащи се в общите линейни групи.

Топологията се занимава с геометрични свойства на криви, повърхнини, и т.н., които остават неизменни при деформация на геометричните обекти – при разтягане, огъване, но без късане или лепене. При нея например окръжност и триъгълник са едно и също.

Казват, че Поанкаре е измислил топологията, защото не умеел да рисува – още като ученик при него горните фигури били трудно различими. Аз обаче препоръчвам на тези, които мислят така да погледнат рисунките му свързани с автоморфни функции.

Основната задача на топологията е да класифицира геометричните обекти с точност до хомеоморфизми - това са именно посочените по-горе деформации. Би било несправедливо да кажем, че Поанкаре е започнал от празно място, че не е имал предшественици. Такъв е Ойлер със задачата за Кьонигсбергските мостове или формулата на Ойлер, свързваща броя на стените, ръбовете и върховете на изпъкнали многостени. Такива са Риман и Бети, класифицирали двумерните компактни повърхнини. Въпреки това е трудно да се каже, че тези постижения са представлявали последователна математическа дисциплина. „Поради това преди Поанкаре трябва да говорим за предистория на алгебричната топология" казва един от най-известните математици и историци на науката Ж. Дьодоне. Полагането на основите на стройна наука с нейните основни понятия, факти, задачи и т.н. започва с въвеждането на споменатото по-горе понятие хомеоморфизъм между две многообразия. За Поанкаре последното означава множеството от съвместни решения на система уравнения, зададени с гладки функции (и удовлетворяващи естествени условия за да отговаря множеството от решения на интуитивното понятие, което имаме от крива и повърхнина). Италианският математик Бети е въвел преди това числа, които остават неизменни при хомеоморфизми, т.е. представляват топологични инварианти. Разбира се при Бети (и неговия приятел Риман) тези понятия са „на пръсти“ - при тях липсват понятията хомеоморфизъм, многообразие. Поанкаре не само че дава ясна дефиниция, но ги допълва с още числа-инварианти – коефициенти на торзия. И най-важното - след Поанкаре тези числа може да се пресмятат за многообразия с по-голяма размерност. Тези, които познават по-добре предмета, биха казали, че въпросните числа се дефинират от групите от хомологии, отговарящи на многообразието. Поанкаре никъде не употрябава понятието групи от хомологии, макар че при внимателното четене на неговите статии се вижда, че понятието е там - просто не е наречено с тези думи.

Много години след Поанкаре дискусията на тема кой е въвел групите от хомологии продължава – например МакЛейн смята че това е Поанкаре, а Дьодоне – обратното. Според мене не е нужно да приписваме всичко, до което се е докоснал Поанкаре, на неговото име - струва ми се, че той самият би възразил като имам предвид как щедро е раздавал приоритети. Във всеки случай Поанкаре никъде не е използвал груповата структура. Впрочем той е въвел и друго основно понятие на топологията - фундаменталната група, този път с това име. С това той полага основите на друг основен раздел на топологията – хомотопичната топология. Един забележителен проблем свързан с това понятие е знаменият проблем на Поанкаре. Вярно ли е че ако едно многообразие има хомотопичните групи на сферата, то е сфера? За решението на многомерните аналози на този проблем (т.е. за четиримерни, петмерни и т.н. сфери) са дадени две филдсофски премии- на С.Смейл и на М. Фридман. Но истинският проблем на Поанкаре е за тримерната сфера и той все още не е решен. Той е поставен в списъка на най-важните проблеми за новия век. За решението му неотдавна създаденият Институт Клей предоставя награда от 1 милион долара. [1]

В една от първите книги по топология С. Лефшец пише „Може би в нито един дял от математиката Поанкаре не е оставил по-неизгладимо своя отпечатък отколкото в топологията“ . И това се отнася за математика, който е въвел автоморфните функции, създал е теорията на динамичните системи, преобърнал е възгледите в небесната механика ... Действително, като се започне от въвеждането на основните понятия и методите за пресмятане чрез триангулация, мине се през най-дълбоките свойства на групите от хомологии и се стигне до мястото, където Поанкаре превъзхожда всички известни математици - да свърже различни области от математиката с топологията до такава степен, че да не може да се посочи коя е основната област. Ще си послужа с примери. Посочената по-горе формула на Ойлер изглежда едно забележително комбинаторно равенство. И нищо повече. И макар че опити то да се обобщи не липсват, те са в най-добрия случай красиви, но не отиващи далече забележки. Грандиозното обобщение на това понятие, направено от Поанкаре, което вече носи името характеристика на Ойлер-Поанкаре, сега е централно понятие не само в топологията, но и в диференциалната геометрия, създадена далеч преди Поанкаре, алгебричната геометрия, динамичните системи,

[1] Впрочем има доста сериозни основания да се счита, че скоро тази награда ще бъде дадена.

теорията на числата... Самият Поанкаре открива, че тази величина не зависи от триангулацията, но може да се пресмята така както е у Ойлер. От друга страна хактеристиката на Ойлер-Поанкаре за многообразие е равна на сумата от индексите на особените точки на коя да е система диференциални уравнения върху многообразието (това е знаменитата теорема на Поанкаре-Хопф). Това свързва характеристиката на Ойлер-Поанкаре с качествената теория на диференциалните уравнения. Освен това дава удобен начин за пресмятането ѝ.

Друг пример е теоремата за дуалност на Поанкаре, която твърди, числата на Бети с номера k и $n-k$ съвпадат за компактни многообразия. Нейните обощения и аналози така са се просмукали в съвременната математика, че без тях тя просто ще се върне с един век назад. Като започнем с теоремата на Александър, през въвеждането на по-удобния „двойнствен“ обект – кохомологии, и всевъзможните теореми за дуалност в алгебричната геометрия и стигнем до начина на разсъждение чрез дуалности – всичко това е плод на тази естествен резултат.

4. МАТЕМАТИКАТА НА ДВАДЕСЕТИ ВЕК

През 1900 г. гениалният съвременник на Поанкаре Давид Хилберт представя пред II световен математически конгрес списък от проблеми, известен сега като „Проблеми на Хилберт“ . Една цел на Хилберт, която личи и от разнобразието на областите, в които са поставени проблемите е да постави ясно въпроса

„...предстои ли на математиката, някога това, което отдавна се случва с другите науки, няма ли тя да се разпадне на отделни частни науки, представителите на които едва се разбират помежду си и поради това, връзките между които стават все по-малко... “ Хилберт не отговаря на поставения въпрос, а възкликва емоционално „Аз не вярвам в това и не го искам!“

Страховете на Хилберт не са безпочвени. Разпадането все повече характеризира математиката от онова време. С бурното ѝ развитие през деветнадесети век постепенно се оформят големи и трудни за изучаване области – алгебрична теория на числата, диференциална геометрия, алгебрична геометрия, небесна механика, да не говорим за класическия анализ.

Заедно с това обаче върви и друга тенденция – на обединяване на математиката. С известно опростяване можем да кажем, че това става като идеи, средства и резултати от едни раздели се пренасят в други раздели. Нека да посочим примера, който дължим на гения на Риман – чрез римановата дзета-функция да се изследва разпределението на простите числа. Но в обединяването на науката не по-малка, а може би по-голяма роля играе умението да се намира общ произход на обекти изглеждащи доста различни.

„Ние трябва да съсредоточим своето внимание главно не толкова върху сходствата и различията, колкото върху тези аналогии, които често се скриват в изглеждащите различия“ , пише Поанкаре в книгата си „Наука и метод“ .

Нека си спомним как правилната интерпретация на трансформациите, запазващи автоморфните функции като пренос, по аналогия (доста неочевидна) на пренос за случая на периодични функции, го довеждат до откритията му в тази област.

Поанкаре е може би първият, който заличава границите между отделните математически дисциплини (без да отричам заслугите на Якоби, Риман, Клайн). Той свободно прехвърля идеи от една област в друга, дотогава считана за съвършенно различна. Преливането отива дотам, че те стават една наука. Например трудно е да определим на кой раздел принадлежи цитираната погоре теорема на Поанкаре-Хопф - на диференциалните уравнения или на алгебричната топология. Или на областта, наречена от С. Ленг „ничия земя“, т.е. диференцирумите многообразия. Така е с автоморфните функции - те са диференциални уравнения, комплексен анализ, геометрия, теория на числата, теория на групите...

Но преди всичко вероятно трябва да посочим изключителната интуиция на Поанкаре, забелязал обединяващата роля на топологията. А това, че топологията е обединяваща наука, личи от следния околонаучен аргумент. Доста повече от половината математици получили Филдсовска награда (математическата „нобелова“ награда) са използвали съществено топологията в своите работи или просто са допринесли за развитието ѝ.

Счита се, че съвременната математика се характеризира преди всичко с алгебризацията си. Поанкаре не е алгебрист (макар да има фундаментални работи и там). По своя начин на мислене Поанкаре е естествоизпитател, физик, а на математически език - геометър. Но ако проследим пътя на алгебризацията ще се убедим веднага, че една от основните крачки, направени от Еми Ньотер, е дефиницията на групите от хомологии и същественото използване на груповата структура, например на изображения между различните групи (хомоморфизми). Това силно обогатява топологията и тя скоро става мощен инструмент в математиката. Вероятно първите фундаментални приложения са при обосноваването и развитието на алгебричната геометрия, която дотогава е била доста интуитивна наука.

По-нататък идват функциите на много комплексни променливи, диференциалната геометрия. Пълният триумф на топологията настъпва, когато тя става основен инструмент в теорията на числата благодарение на А. Вейл, А. Гротендик, Е. Артин, Дж. Тейт и др. и на нейна база става обединението ѝ с алгебричната геометрия. Покрай това се създават нови математически дисциплини, също имащи до голяма степен обединяващ характер – теорията на сноповете, хомологичната алгебра, K-теорията и др. По този начин участието на Поанкаре в създаването на фундамента на съвременната математика е решаващо - и в определяне на централните направления на изследванията, и в създаването на съвременния универсален език, който обединява класически разделените геометрия и алгебра. Това, от което се е страхувал Хилберт – разпадането на математиката на отделни науки – не стана факт. В интервю с един от най-видните математици на изминалия век – Жан-Пиер Сер, на въпроса за перспективите за обединение на математиката, той отговаря - „Това вече се е случило“ и илюстрира твърдението си така. Стойността на римановата дзета-функция в точката -1 е $-1/12$. Точно толкова е стойността на характеристиката на Ойлер-Поанкаре (орбифолдната) на групата от целочислени матрици с детерминанта 1. Това случайно ли е? Оказва се, че не. Фактът има дълбоко обощение свързващо други групи и други дзета-функции. „Такива въпроси не са теория на числата, нито топология, нито теория на групите: те са просто математика.“ обобщава знаменитият ни съвременник.

Заслугата за това нашата наука да остане единна, като намери универсални средства за разбирането на проблемите й чрез обединяване на тези проблеми, т.е. намирането на по-общи постановки, а оттук и за бурното й развитие, принадлежи на серия блестящи умове. Но днес без преувеличение можем да кажем, че сред тях първи е Поанкаре. Тук си струва един цитат от книгата „Що е математика“ . Нейният автор и достоен наследник на Поанкаре В. И. Арнолд казва:

Поанкаре е създател на математиката на двадесетия век.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Poincaré, Ouvres, Gauthir-Villars, 1916-1956.
2. А. Пуанкаре, О науке, Изд. Наука, 1990.
3. А. Пуанкаре, Избранные труды, Изд. Наука, 1974.
4. B. Ernst, Der Zauberspiegel des M. C. Escher. Taschen.
5. I. Kra, Automorphic forms and Kleinian groups, W.A. Benjamin, Inc.
6. G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of of automorphic functions. Princeton University Press.
7. И. М. Гельфанд et al., Обобщенные функции, в. 6: Теория представлений и автоморфные функции, Изд. Наука, 1966.
8. R. Langlands, 1967 Letter to Weil (и всички други съчинения на Ленгландс) на адрес: *http : //www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/intro.html*
9. Д. Я. Стройк, Краткий очерк истории математики, Наука, 1969.
10. J. Barrow-Green, Poncaré and the three body problem, AMS-LMS.
11. В. И. Арнольд, Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, *Усп. Мат. Наук*, **18**, 1963, No 6.
12. D. Hilbert, Mathematical problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **37**, 2000, 407-436.

13. P. Popivanov, N. Kutev, Viscosity solutions to the degenerate oblique derivative problem for fully nonlinear elliptic equations, *Compt. Rendus Acad. Sci. Paris Math.*, **334**, 2002, No 8, p. 661-666(6).

14. J. Dieudonné, A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960, Birkhäuser.

15. S. McLane, Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether, *J. Pure and Appl. Algebra*, **39**, 1986, 305-307.

16. S. Lefschetz, Algebraic Topology, American Mathematical Society, 1942, 389 p. *http : //www.ams.org/online_bks/coll27/*

17. An interview with J.P. Serre, Mathematical Medley, June, 1985. *http : //sps.nus.edu.sg/ limchuwe/articles/serre.html*

18. G. Harder, A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **4**, 1971, 409-455.

19. В. И. Арнольд, Что такое математика? МЦНМО, 2002.

Received January 15, 2005

Faculty of Mathematics and Informatics
"St. Kl. Ohridski" University of Sofia
5, J. Bourchier blvd., 1164 Sofia
BULGARIA
E-mail: horozov@fmi.uni-sofia.bg