ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Том 98

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Tome 98

ВЪРХУ ИЗСЛЕДВАНИЯТА НА ЧЛ.-КОР. БЛ. ДОЛАПЧИЕВ ПО АНАЛИТИЧНА МЕХАНИКА [1]

ЛЮБОМИР ЛИЛОВ

Main results of corresponding member of the Bulgarian Academy of Sciences Professor Dolapchiev in the field of Analytical Mechanics concerning motion equations are presented. They are based on the variational principles of mechanics and can be applied to both holonomic and nonholonomic systems.

Ще започна с удивителния факт, че до 1965 г. проф. Долапчиев няма нито една работа по аналитична механика, въпреки че званията „доцент" и „професор", които е получил, са точно по аналитична механика, а от 1951 г. е и ръководител на Катедрата по аналитична механика в Софийския университет. Както свидетелства проф. Чобанов, повод да започне изследвания в областта на нехолономните системи е един елементарен курс по механика от Нилзен (Nilsen, J. Vorlesungen über elementare Mechanik. Berlin, Springer, 1935), в който курс проф. Долапчиев се натъква на непозната форма на уравнения на движение, които той в следващите си публикации нарича уравнения на Нилзен. Науката трябва да е благодарна на това, общо взето, случайно събитие, защото този начален момент отключва една кипяща изследователска дейност, довела до публикуването на 23 работи, получили световно признание и донесли на създателя си заслужена слава. През 1965 г. проф. Долапчиев е точно на 60 години и с тези изследвания той изживява втората си математическа младост. Резултатите му в аналитичната механика са едни от най-добрите, ако не и най-добрите, които той е постигнал като учен. Те продължават и обобщават

[1] Доклад, изнесен на честването на 100-годишнината от рождението му.

изследванията на акад. Ценов, друг български учен, намерил световно признание с изведените от него уравнения за нехолономни системи, известни днес като уравнения на Ценов, така че върху тази област на механиката е сложен силен български отпечатък и може да се говори за българска научна школа.

Много е трудно, ако не и невъзможно да се излагат резултати, предполагащи познаването на специфичен абстрактен математически апарат пред нехомогенна аудитория. Ще се опитам по възможно най-елементарен начин да представя същността на постиженията на проф. Долапчиев в областта на аналитичната механика.

Нека да имаме система от N материални точки с маси m_ν, радиус-вектори $\mathbf{r}_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$, на които действат сили $\mathbf{F}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. Ако системата е свободна, то съгласно втория закон на Нютон движението на точките се описва с уравненията

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu \left(t, \mathbf{r}_\mu, \dot{\mathbf{r}}_\mu\right), \ \ \nu = 1, ..., N. \tag{1}$$

Имаме $3N$ диференциални уравнения за толкова скаларни неизвестни x_ν, y_ν, z_ν. Нека сега на системата са наложени d крайни или геометрични връзки:

$$f_\alpha \left(t, \mathbf{r}_\nu\right) = 0 \ (\alpha = 1, ..., d). \tag{2}$$

Такава система се нарича холономна. Да предположим, че тя е разрешена и d от променливите са представени като функция на останалите $n = 3N - d$ или по-общо: радиус-векторите на точките са представени като функции на времето и n параметри, наречени обобщени координати:

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu \left(t, q_1, q_2, ..., q_n\right),$$

по такъв начин, че уравненията на връзките (2) се удовлетворяват тъждествено.

$$f_\alpha \left(t, \mathbf{r}_\nu \left(t, q_1, q_2, ..., q_n\right)\right) \equiv 0 \ \ (\alpha = 1, ..., d).$$

Геометричните връзки налагат ограничения не само върху положенията на точките, но и върху техните скорости и ускорения. Действително след еднократно и двукратно диференциране на уравненията на връзките намираме

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \bullet \dot{\mathbf{r}}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}\mathbf{i} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu}\mathbf{j} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu}\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{r}}_\nu = \dot{x}_\nu \mathbf{i} + \dot{y}_\nu \mathbf{j} + \dot{z}_\nu \mathbf{k},$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \bullet \ddot{\mathbf{r}}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu}\right) \bullet \dot{\mathbf{r}}_\nu + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right) = 0. \tag{4}$$

Ако заместим определените от (1) ускорения $\ddot{\mathbf{r}}_\nu = \dfrac{1}{m_\nu}\mathbf{F}_\nu\left(t, \mathbf{r}_\mu, \dot{\mathbf{r}}_\mu\right)$ в двукратно диференцираните уравнения на връзките (4), то те няма да се удовлетворят. В този случай материално осъществените връзки действат на точките с допълнителни сили, наречени реакции на връзките или само реакции, така че сега движението на точките се подчинява на уравненията

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu, \;\; \nu = 1, ..., N \tag{5}$$

и определените от (5) ускорения удовлетворяват уравненията на връзките (4). Реакциите обаче предварително не са известни и те въвеждат допълнителни $3N$ неизвестни $(R_{\nu x}, R_{\nu y}, R_{\nu z})$ Задачата на механиката става неопределена – необходими са още $n = 3N - d$. съотношения, които да допълнят съотношенията (2) и (5). Тези съотношения се получават, ако се приеме постулатът за идеалност на връзките: Сумата от елементарните работи на реакциите на връзките за произволно виртуално преместване на системата $\delta\mathbf{r}_\nu$ е равна на нула.

Постулат за идеалност на връзките:

$$\delta' A = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \bullet \delta\mathbf{r}_\nu = 0. \tag{6}$$

Какво е виртуално преместване? Това е съвършено фундаментален въпрос, изясняването на който е отнело десетилетия, ако не и столетия, и който периодично се дискутира дори и в наши дни. По времето на Лагранж нещата са изглеждали ясни и виртуалните премествания са били определяни като разлики между две възможни (допускани от връзките) елементарни премествания за едно и също положение на системата в един и същ момент от време:

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \left(\dot{\mathbf{r}}'_\nu - \dot{\mathbf{r}}_\nu\right) dt,$$

където скоростите $\dot{\mathbf{r}}'$ и $\dot{\mathbf{r}}$ удовлетворяват продиференцираните уравнения на връзките (3), т.е.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \bullet \delta\mathbf{r}_\nu = 0.$$

Ако заместим реакциите от (5) в (6), намираме следната форма на постулата за идеалност на връзките, известна като общо уравнение на динамиката или принцип на Даламбер-Лагранж:

$$\sum_{v} \left(m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v\right) \bullet \delta\mathbf{r}_v = 0. \tag{7}$$

От общото уравнение на динамиката Лагранж директно извежда през 1788 г. знаменитититe си уравнения за холономни системи

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

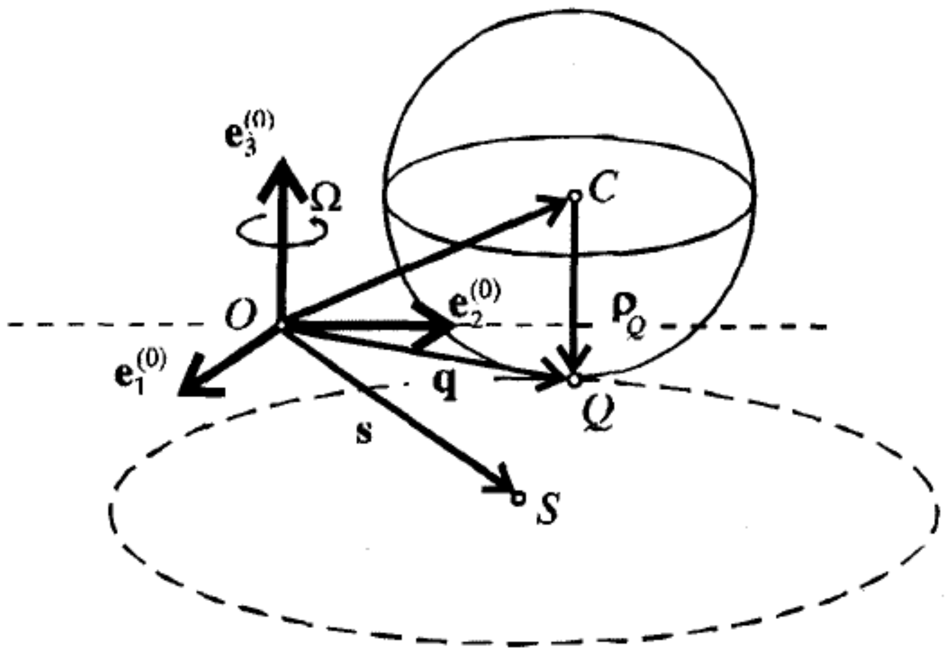
където T е кинетичната енергия на системата

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2.$$

Развитието на техниката довежда обаче до необходимостта в аналитичната механика да се разглеждат и нехолономни системи, т.е. несвободни системи, на които са наложени диференциални неинтегруеми връзки, съдържащи скоростите:

$$\varphi_\beta\left(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu\right) = 0 \quad (\beta = 1, ..., g).$$

Като пример да разгледаме движението на сфера по равнина, като предполагаме абсолютно грапав контакт, т.е. сферата не може да се хлъзга и да буксува, а се търкаля по равнината.



Фиг. 1

Условието, че сферата не може да се хлъзга, означава, че скоростта на контактната точка Q е нула, което води до две неинтегруеми съотношения в тази задача.

Уравненията на Лагранж са невалидни за нехолономни системи. В десетилетията и столетията след Лагранж се появяват различни форми на уравнения за нехолономни системи, та чак до наши дни. Да спомена уравненията на Routh (1877), Voss (1885), Maggi (1896), Чаплыгин (1897), Volterra (1898), Appelle

(1899) - Gibbs (1879), Boltzmann (1902) - Hammel (1904). Особено елегантни са уравненията на Appelle (получени 20 години преди него от Gibbs и останали незабелязани):

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i,$$

където

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu^2$$

е енергията на ускоренията. Този израз обикновено е много сложен и се пресмята доста по-трудно от кинетичната енергия. Търсейки баланс между доапеловите уравнения за нехолономни системи, които имат сложна форма, но боравят с по-простия израз на кинетичната енергия и уравненията на Апел, акад. Ценов, който е ученик на Апел, достига до следната форма уравнения на движение, известни днес като уравнения на Ценов (1952):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - 3\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Това са уравнения за холономни системи, но изведени с оглед на приложението им за нехолономни системи. В цитирания по-горе учебник на Нилзен проф. Долапчиев се натъква на следната форма уравнения на движение:

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Еднаквата структура на двете форми дава импулс на проф. Долапчиев да започне интензивни изследвания и през 1965 г. той достига до най-общата форма уравнения на движение

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q}_i} - (n+1)\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

които той нарича обобщени уравнения на Лагранж. Тук $\overset{(n)}{T} = d^nT/dt^n$. При $n = 1$ и $n = 2$ се получават съответно уравненията на Нилзен и Ценов. По друг начин тези уравнения са изведени през 1962 г. от Mangeron, D., Deleanu, S. в работата им "Sur une class d'equation de la mechanique analytique au sens de I. Tzenoff. Comptes rendues d. Ac. Bulg. Des sciences, Bd. 15, 1962". Това, което проф. Долапчиев прави повече от Mangeron и Deleanu, е, че той придава на тези уравнения и Апелов вид

$$\frac{\partial R_n}{\partial \overset{(n)}{q}_i} = Q_i \qquad (i = 1, ..., n),$$

където R_n е подходящо определена функция. Тази форма разкрива нови възможности, когато тези уравнения се приложат за нехолономни системи. Забележително постижение на проф. Долапчиев е начинът по който той свързва обобщените уравнения на Лагранж с вариационните принципи на механиката. До началото на XX век освен принципа на Даламбер широко е бил известен и принципът на Гаус за най-малката принуда: „Във всеки момент истинското движение на една механична система, подчинена на идеални връзки, се отличава от всички останали кинематически възможни (т.е. при същите връзки) движения, които системата би извършила от същата конфигурация и със същите скорости, но при други ускорения, по това, че за истинското ѝ движение функцията

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{v} \frac{1}{m_v} \left(m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v \right)^2,$$

наречена „принуда (Zwang)" има минимум." Като изразим вариационното твърдение в принципа на Гаус, ще получим

$$\sum_{v} \left(m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v \right) \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}}_v = 0, \tag{8}$$

като положенията и скоростите на точките не се варират $\delta \mathbf{r}_v = \delta \dot{\mathbf{r}}_v = 0$, а се варират ускоренията $\ddot{\mathbf{r}}_v$ по такъв начин, че да не се нарушават наложените връзки.

Както отбелязва проф. Долапчиев, едва през 1909 г. Журден забелязва, че всъщност между двата принципа (7) и (8) съществува празнина и може да се формулира следният вариационен принцип

$$\sum_{v} \left(m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v \right) \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_v = 0,$$

в който конфигурацията на системата е фиксирана $\delta \mathbf{r}_v$, а се варират само скоростите.

По-късно Лайтингер забелязва, че принципът на Журден следва директно от принципа на Даламбер чрез пълно диференциране на (7) по времето, като се държи сметка за съотношението

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_v = \delta \frac{d\mathbf{r}_v}{dt}$$

и се положи след това $\delta \mathbf{r}_v = 0$. По същия начин от принципа на Журден се получава принципът на Гаус. Най-общата форма, до която се достига по този начин, е дадена от Нордхайм:

$$\sum_{v} \left(m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v \right) \cdot \delta \overset{(n)}{\mathbf{r}_v} = 0 \tag{9}$$

при $\delta\mathbf{r}_\nu = \delta\dot{\mathbf{r}}_\nu = \ldots = \delta\overset{(n-1)}{\mathbf{r}_\nu} = 0$, където с $\overset{(i)}{\mathbf{r}_v} = d^i\mathbf{r}_v/dt^i$ е означена i-тата производна по времето на $\mathbf{r}_\nu$. Принципът (9) е наречен от проф. Долапчиев „обобщен принцип на Даламбер“. От обобщения принцип на Даламбер проф. Долапчиев директно получава своите обобщени уравнения на Лагранж по подобен начин, както Лагранж е получил своите уравнения от принципа на Даламбер. По този начин се получава едно красиво съответствие между различните форми уравнения на движение и съответния вариационен принцип:

• при $\delta\mathbf{r}_\nu \neq 0$ – принцип на Даламбер:

$$\sum_v \left(m_v\ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v\right)\cdot\delta\mathbf{r}_v = 0;$$

– уравнения на Лагранж:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

• при $\delta\mathbf{r}_\nu = 0$, $\delta\dot{\mathbf{r}}_\nu \neq 0$ – принцип на Журден:

$$\sum_v \left(m_v\ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v\right)\cdot\delta\dot{\mathbf{r}}_v = 0;$$

– уравнения на Нилзен:

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

• при $\delta\mathbf{r}_\nu = \delta\dot{\mathbf{r}}_\nu = 0$, $\delta\ddot{\mathbf{r}}_\nu \neq 0$ – принцип на Гаус:

$$\sum_v \left(m_v\ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v\right)\cdot\delta\ddot{\mathbf{r}}_v = 0;$$

– уравнения на Ценов:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\dot{q}_i} - 3\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i, \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

• при $\delta\mathbf{r}_\nu = \delta\dot{\mathbf{r}}_\nu = \ldots\delta\overset{(n-1)}{\mathbf{r}_v} = 0$, $\delta\overset{(n)}{\mathbf{r}_v} \neq 0$; – обобщен принцип на Даламбер:

$$\sum_v \left(m_v\ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v\right)\cdot\delta\overset{(n)}{\mathbf{r}_v} = 0.$$

– обобщени уравнения на Лагранж:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q_i}}-(n+1)\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)=Q_i, \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Всички уравнения на движение са идентични помежду си и вариационните принципи са равностойни, когато се отнасят за холономни системи, при които е възможно да бъдат въведени обобщени координати. Не винаги обаче това е възможно. За такива холономни системи и за всички нехолономни системи използването на един или друг вариационен принцип може да доведе до съществени предимства. Проф. Долапчиев специално е разгледал този проблем и го е решил по следния начин. Той представя обобщения принцип на Даламбер като условие за стационарност на функцията Z_n.

$$\begin{gathered}\delta Z_n=0, \qquad \delta=\delta\overset{(n)}{\mathbf{r}_v}, \quad \delta\mathbf{r}_v=\delta\dot{\mathbf{r}}_v=\cdots=\delta\overset{(n-1)}{\mathbf{r}_v}=0,\\ Z_n=\sum_v\left(m_v\ddot{\mathbf{r}}_v-\mathbf{F}_v\right)\cdot\overset{(n)}{\mathbf{r}_v},\end{gathered} \tag{10}$$

ако вѐличината $\left(m_v\ddot{\mathbf{r}}_v-\mathbf{F}_v\right)$ не зависи от $\overset{(n)}{\mathbf{r}_v}$. Варирането в последната формула се води по $\overset{(n)}{\mathbf{r}_v}$. Тази функция трябва да се разглежда като функция само на величините $\overset{(n)}{\mathbf{r}_v}$ и стационарността се разбира при изпълнение на наложените на системата връзки:

$$f_s\left(t,\ \mathbf{r}_v,\ \dot{\mathbf{r}}_v,\ldots,\ \overset{(m_s-1)}{\mathbf{r}_v}\right)=0, \qquad m_s\geq 1 \quad (s=1,\ldots,l). \tag{11}$$

Нека $m=\max\limits_{1\leq s\leq l} m_s$. Уравненията на връзките (11) ще запишем в еднообразна форма, като в случая $m_s<m$ диференцираме съответното уравнение $(m-m_s)$ пъти пълно по времето t. Така получаваме системата

$$\varphi_s\left(t,\ \mathbf{r}_v,\ \dot{\mathbf{r}}_v,\ldots,\ \overset{(m-1)}{\mathbf{r}_v}\right)=0 \qquad (s=1,\ldots,l). \tag{12}$$

Ако не всички уравнения на система (12) съдържат линейно $\overset{(m-1)}{\mathbf{r}_v}$, след още едно диференциране, както отбелязва проф. Долапчиев, получаваме връзки, които са вече линейни по отношение на ускоренията от най-висок ред:

$$\sum_v\frac{\partial f_s}{\partial\overset{(m-1)}{\mathbf{r}_v}}\cdot\delta\overset{(m)}{\mathbf{r}_v}+\cdots=0.$$

По този начин, ако n е достатъчно голямо ($n\geq(m-1)$ – в случая на линейност на уравнения (12) по отношение на $\overset{(m-1)}{\mathbf{r}_v}$, или $n\geq m$ – в случая на нелинейност), можем винаги да смятаме, че стационарността на Z_n в (10) по отношение на $\overset{(n)}{\mathbf{r}_v}$ е при линейни за $\overset{(n)}{\mathbf{r}_v}$ ограничения. Оттук критерият, който формулира проф. Долапчиев за използването на един или друг вариационен принцип, е следният: избира се онова n, за което уравненията на връзките са линейни по отношение на вариациите.

Краткият обзор на изследванията на проф. Долапчиев по аналитична механика, който направих, показва значимата следа, която той е оставил в този дял на механиката. Не бива да забравяме, че аналитичната механика е най-старият дял на механиката, където е извънредно трудно да се направи нещо ново. Толкова повече следва да се гордеем с изследванията на проф. Долапчиев и акад. Ценов, дали достоен български принос в световната наука.

Получена на 27.11.2005

Любомир Лилов
Факултет по математика и информатика
Софийски университет „*Св. Климент Охридски*"
1164 София, п.к. 64, БЪЛГАРИЯ
E-mail: lilov@fmi.uni-sofia.bg