ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Том 98

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Tome 98

ВЪРХУ ИЗСЛЕДВАНИЯТА НА КИРИЛ ПОПОВ ПО БАЛИСТИКА [1]

ЛЮБОМИР ЛИЛОВ

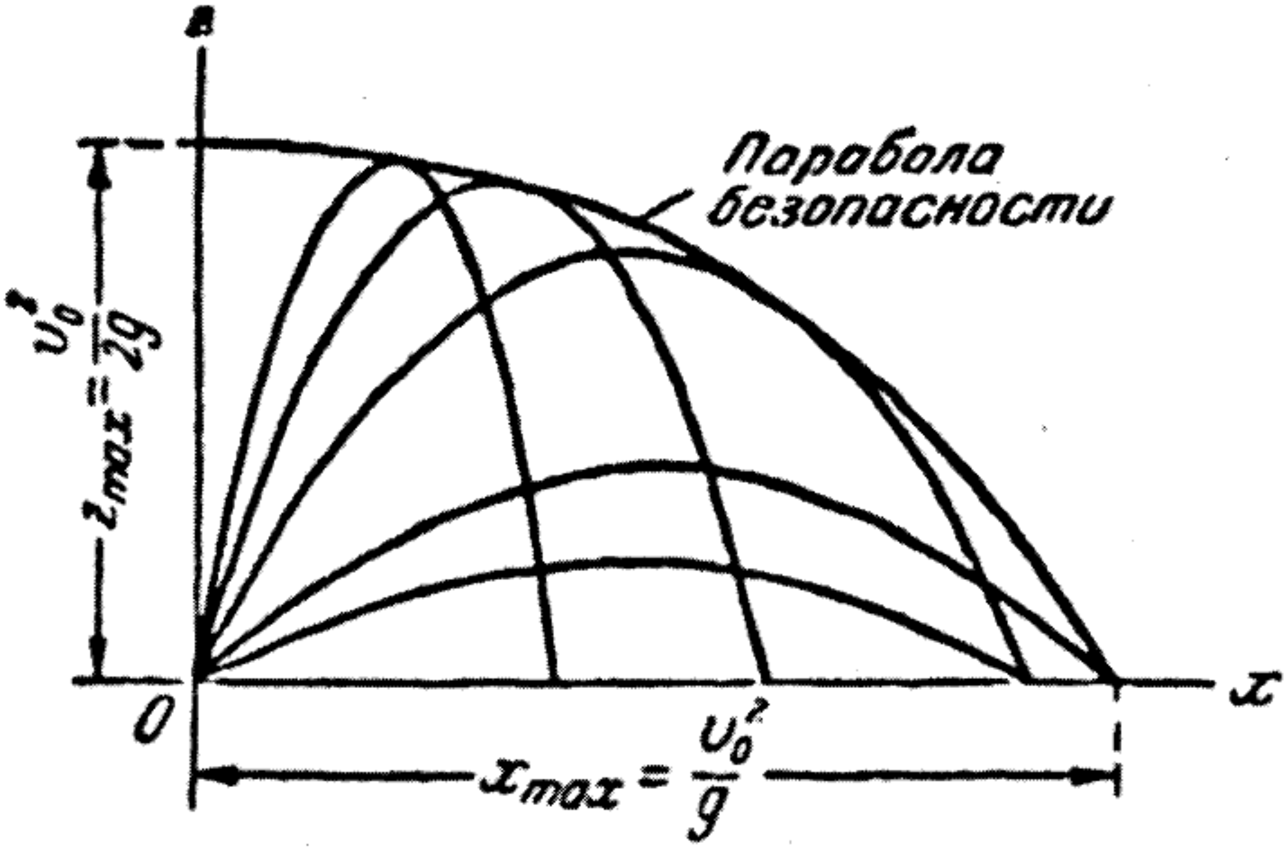
A short survey on the main results of Кирил Popoff in the field of ballistics is presented. Special attention is given to the affine transformations of the gravity center trajectories and the shell rotations around its gravity center.

В изложението се използват минимален брой формули и ще се даде представа за основните идеи и постижения на Кирил Попов в областта на външната балистика. Това вероятно ще лиши изложението от определена строгост, но ще го направи по-достъпно за неспециалистите.

Доклада си ще започна с едно приложно изследване на Кирил Попов, което показва свежия му поглед върху отдавна решени и рутинни задачи и тази нова интерпретация на познати резултати неочаквано води до създаване на по-ефективни методи за изследване, а в много случаи и до ново знание. Задачата е конструктивно да се установят траекториите на артилерийски снаряд по данни от стрелби на полигона – една задача, която има без съмнение основно значение за военните. Известен резултат от механиката е, че масовият център на един снаряд се движи като материална точка, на която действат всички приложени към точките на снаряда външни сили. В силно идеализирания случай на отсъствие на съпротивление единствената действаща сила е силата на тежестта. Да напомня добре известното решение на задачата за движение на точка в хомогенното поле на силата на тежестта при отсъствие на съпротивление. Тази задача е задължителен пример при преподаването на

[1] Доклад, изнесен на честването на 125-годишнината от рождението му.

раздела „Динамика на точка“ в курса по механика. Точката, изстреляна под ъгъл α към хоризонта с начална скорост v_0, описва парабола като при зададена начална скорост височината на траекторията е най-голяма при $\alpha = \pi/2$, а далечината на полета – при $\alpha = \pi/4$ (фиг.1). Менейки α от 0 до $\pi/2$, получаваме семейство траектории в първи квадрант на координатната система Oxy, което семейство има като еволвента отново парабола, минаваща през най-високата и най-далечната точка, достижими със скорост v_0 – така наречената парабола на безопасността.



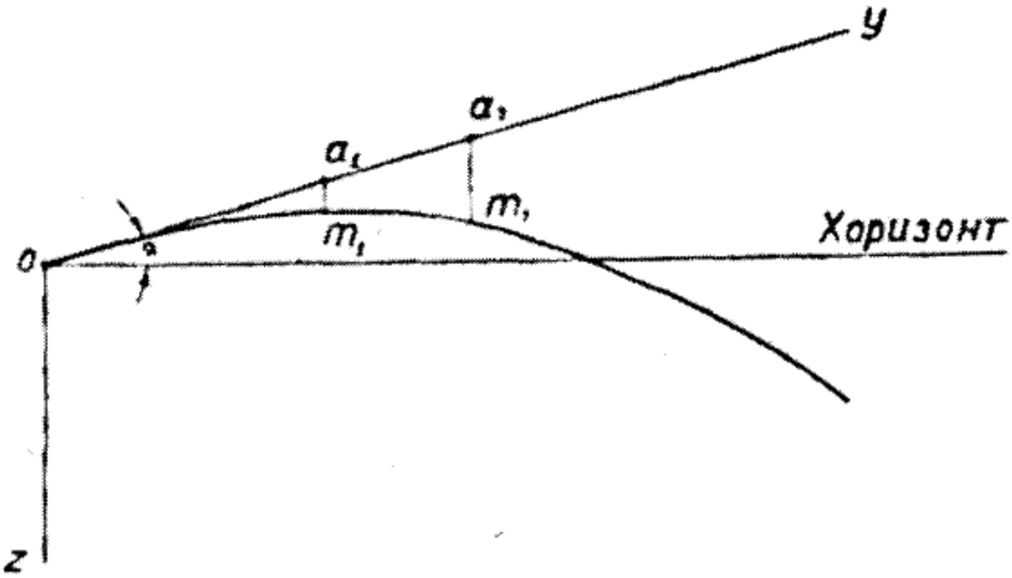
Фиг. 1

Кирил Попов прави интересна интерпретация на това движение, която след това му дава възможност да разгледа истинското движение на снаряда в съпротивителна среда. За простота на разглежданията да приемем навсякъде по-нататък, че масата на материалната точка е единица. Да отнесем движението на точката към координатна система, чиято ос Oy съвпада с началната скорост v_0 на точката, която сключва ъгъл α с хоризонта, а оста Oz е насочена надолу към центъра на Земята (фиг. 2).

При този избор на координатната система движението на точката може да се разглежда като геометричен сбор от движение на точката по оста Oy с постоянна скорост v_0

$$y = v_0 t$$

 Ann. Sofia Univ., Fac. Math and Inf., **98**, 2008, 11-23.



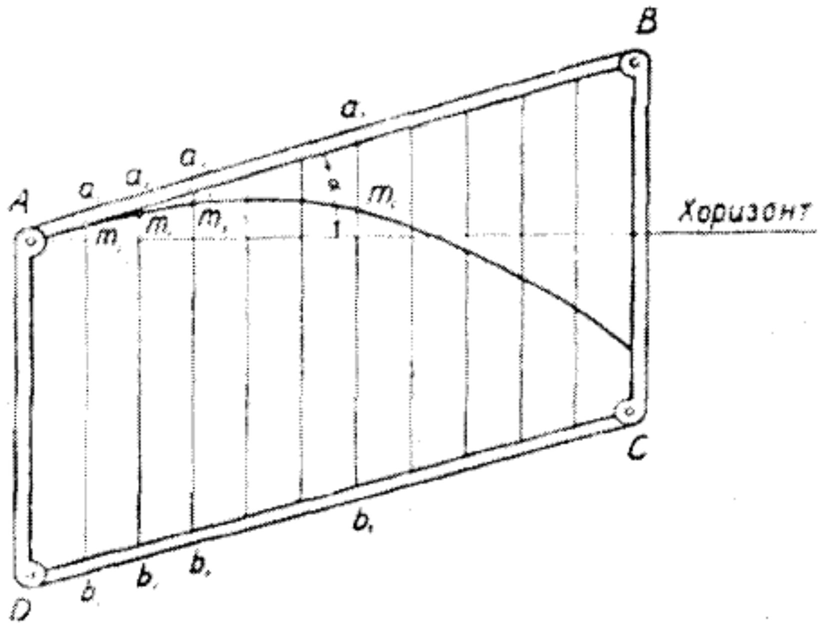
Фиг. 2

и движение по оста Oz, с начална скорост нула и ускорение g:

$$z = g\frac{t^2}{2}.$$

Удобството на така въведената от Кирил Попов координатна система е, че тези два израза са независими от ъгъла α, който началната скорост сключва с хоризонта, и зависят само от времето t, от g и от v_0, които са постоянни. Това дава възможност траекториите на точката при различните ъгли α да могат да се изведат една от друга чрез една проста трансформация.

Да си изберем една деформируема рамка с постоянни, успоредни страни, ъглите между които могат да се менят и да вземат различни стойности (фиг.3).



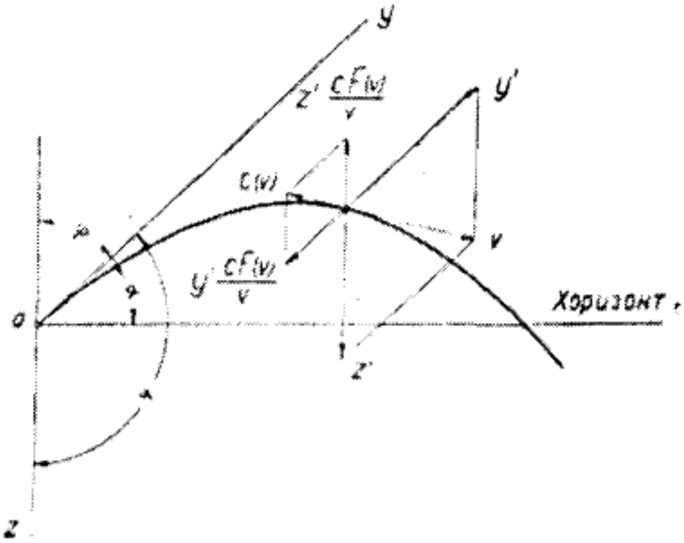
Фиг. 3

Да отбележим върху рамото AB на тази рамка точките a_1, a_2, a_3,... на разстояние v_0, $2v_0$, $3v_0$... от началото A, а също и точките b_1, b_2, b_3,... върху рамото CD на същите разстояния от D. Да опънем между съответните точки a_i, b_i нишки a_ib_i и върху тях да нанесем точките m_1, m_2, m_3,... на разстояния $\frac{g}{2}$, $g\frac{2^2}{2}$, $g\frac{3^2}{2}$,... от a_1, a_2, a_3,... При различните ъгли, които рамото AB сключва с хоризонта, точките m_1, m_2, m_3,... ще се редят по съответните траектории на точката m, хвърлена от върха A с начална скорост $\mathbf{v}_0$, която по посока съвпада с рамото AB. При деформациите на рамката, като меним ъгъла BAD, ще се получат всички траектории, които отговарят на началната скорост $\mathbf{v}_0$ и на ъгли на хвърлянето $\angle BAD$.

Кирил Попов си задава въпроса, доколко и при какви условия това афинно свойство на траекториите в безвъздушно пространство да се извеждат една от друга чрез описаната деформируема рамка се запазва при движението на материалната точка във въздуха, т.е. при движение в съпротивителна среда.

На пръв поглед самото поставяне на въпроса изглежда абсурдно, тъй като, на една и съща начална скорост и при един и същи ъгъл на изстрела траекториите в една съпротивителна среда по размер коренно се отличават от траекториите в безвъздушното пространство, особено ако съпротивлението на средата, нейната плътност, е много голямо. Но въпреки това много важни свойства на траекториите в безвъздушното пространство се запазват при траекториите на артилерийския снаряд във въздуха, свойства, които могат да се използват при артилерийските стрелби.

Да допуснем сега, че материалната точка, с маса единица, е изстреляна с начална скорост $\mathbf{v}_0$, която сключва ъгъл α с хоризонта на отвора на оръдието.



Фиг. 4

Да изберем и в този случай отвора на оръдието за начало на координатната система, оста Oy на която съвпада с началната скорост $\mathbf{v}_0$, а оста Oz е насочена по вертикалата към центъра на Земята (фиг. 4).

Да означим с m положението на материалната точка върху нейната траектория в момента t и с v — нейната скорост в този момент, скорост, насочена по тангентата на траекторията. Да означим с $F(v)$ съпротивлението на средата при движението на точката, съпротивление отнесено към единица маса и насочено по тангентата на траекторията, в обратна посока на скоростта, съпротивление, което е функция на скоростта. Да означим с y' и z' компонентите на скоростта по координатните оси. Компонентите на съпротивлението по осите Oy и Oz ще бъдат, вземайки предвид чертежа на фиг. 4, съответно

$$y'\frac{F(v)}{v} \quad \text{и} \quad z'\frac{F(v)}{v}\,. \tag{1}$$

Диференциалните уравнения на движението спрямо избраната координатна система ще бъдат следователно

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= -y'\frac{F(v)}{v} = -y'f(v), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g - z'\frac{F(v)}{v} = g - z'f(v), \end{aligned} \tag{2}$$

при начални условия $t = 0,\ y = z = 0,\ y' = v_0,\ z' = 0$. Тук

$$\begin{aligned} v^2 &= y'^2 + z'^2 - 2y'z'\sin\alpha \\ &= (y' + z')^2 - 4y'z'\sin^2\tfrac{\psi}{2} \\ &= (y' - z')^2 + 4y'z'\sin^2\tfrac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

където $\psi = \pi/2 + \alpha$, $\varphi = \pi/2 - \alpha$.

Оттук се вижда, че интегралите на уравненията (2) при началните условия $t = 0$, $y = z = 0$, $y' = v_0$, $z' = 0$ зависят от ъгъла α само посредством v и ще бъдат независими от α, ако

$$\frac{F(v)}{v}$$

се редуцира на една константа k, т. е. ако

$$F(v) = kv.$$

Това означава линейно съпротивление на средата, което е типично за скорости от порядъка до 0,36 км/ч, каквато скорост значително се надхвърля от артилерийския снаряд. Кирил Попов разглежда обаче отначало този случай и получените при неговото изследване резултати обобщава по-късно за реалното движение на снаряда. В този случай каквато и да е стойността на константата k, при една и съща начална скорост v_0, както координатите y и z, тъй и компонентите на скоростта y' и z' по осите ще бъдат независими от ъгъла α, който началната скорост v_0 сключва с хоризонта, и ще зависят изключително от k и от времето t. Тъй ще имаме

$$
\begin{aligned}
y &= y\left(t, v_0, k\right), & y' &= y'\left(t, v_0, k\right), \\
z &= z\left(t, v_0, k\right), & z' &= z\left(t, v_0, k\right),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

където производните са взети по времето t.

При $F(v) = kv$ диференциалните уравнения (2) приемат вида

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2} &= -ky', \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= g - kz'.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Интегрирани при начални условия

$$
t = 0, \qquad y = z = 0, \qquad y' = v_0, \qquad z' = 0,
$$

те дават

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), & y' &= v_0 e^{-kt} \\
z &= \frac{g}{k}\left(t - \frac{1}{k} + \frac{e^{-kt}}{k}\right), & z' &= \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Лесно е да се види, че при $k = 0$ тези изрази преминават в съответните изрази за безвъздушното пространство. От формулите (5) за $t \to +\infty$ получаваме

$$
\lim_{t \to +\infty} y = \frac{v_0}{k}, \qquad \lim_{t \to -\infty} y' = 0
$$

$$
\lim_{t \to +\infty} z = +\infty, \qquad \lim_{t \to -\infty} z' = 0.
$$

Следователно, както и да избираме константата $k \neq 0$, всяка траектория при $F(v) = kv$ асимптотично се приближава до една вертикална права, уравнението в избраната координатна система на която е

$$
y = \frac{v_0}{k}.
$$

Да се обърнем сега към нашия паралелограм и по рамената AB и DC от A и D на разстояния

$$
y = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \text{ при } \quad t = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots
$$

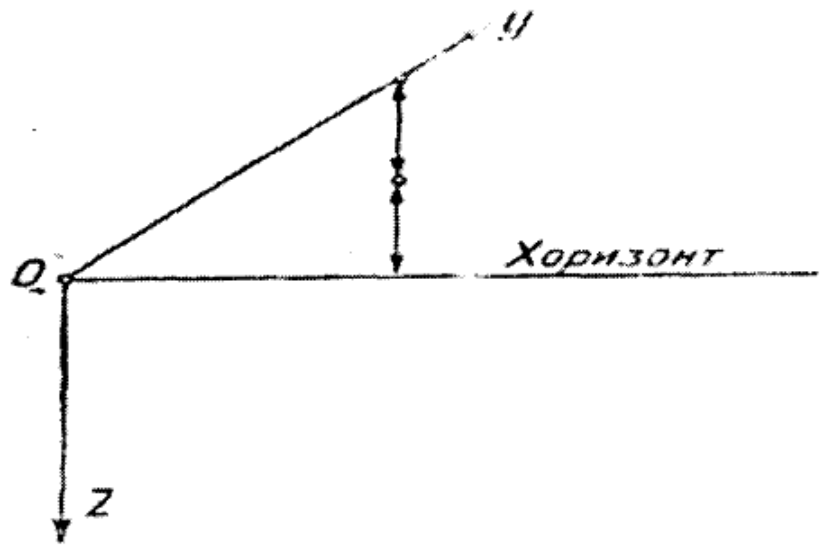
нанесем съответно точките $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$ Да съединим съответните точки a_i, b_i с нишки $a_i b_i$, по които от точките a_1, a_2, $a_3, \ldots$ на разстояния

$$
z = \frac{g}{k}\left(t - \frac{1}{k} + \frac{e^{-kt}}{k}\right) \text{ при } \quad t = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots
$$

да нанесем точките $m_1, m_2, m_3, \ldots$ При всяко положение на рамката тези точки ще се нареждат по една траектория, която отговаря на началната скорост v_0, при $\alpha = \angle BAD - \pi/2$. При деформацията на рамката кривата $Am_1, m_2, m_3, \ldots$ ще съвпада последователно с всички траектории на фамилията траектории, характеризирани с параметрите v_0 и k. Пресмятането на една от тези траектории води до познаването на всички останали. По аналогичен начин, когато вместо y и z вземем y' и z', ще получим и ходографа на скоростите.

С други думи, и в случая на съпротивление (но само пропорционално на скоростта) установените при движение в несъпротивителна среда афинни свойства на траекториите остават в сила и могат да се получават една от друга с помощта на описания от акад. Кирил Попов успоредник.

Как сега от тези резултати Кирил Попов минава към реалния случай, когато законът на съпротивление може да има много по-сложен вид? Интуитивната му догадка е следната. Тъй като стойностите на дадена холоморфна функция $F(v)$ в даден интервал върху положителната ос на комплексната равнина v може да се заключат между стойностите на функциите kv при същия интервал за v, които отговарят на две близки стойности на k, би могло да се допусне, че установеното свойство на траекториите при $F(v) = kv$ с голямо приближение ще бъде практически удовлетворено и при всеки физически допустим закон на съпротивление $F(v)$ на въздуха. Това досещане той обосновава строго след това по два различни начина, при това като взема предвид и обстоятелството, че в най-общия случай съпротивлението на средата зависи и от нейната плътност, в дадения случай от плътността на атмосферния слой, през който снарядът преминава, а тази плътност намалява с височината h над хоризонта, височина, която при нашия избор на координатната система е $h = y \sin\alpha - z$ (фиг. 5).



Фиг. 5

Няма да се спирам на строгата математическа обосновка на този резултат, а направо ще премина върху практическото му използване и ще покажа как установените афинни свойства на траекториите при най-общ случай на закон на съпротивлението могат да се използват за получаване по конструктивен начин на траекториите във въздуха по данни от стрелба на полигона..

Да допуснем, че за дадена стойност α на ъгъла на изстрела сме установили на полигона разстоянието d от отвора на оръдието до мястото на падането на снаряда в хоризонта на оръдието и интервала време t от момента на изстрела до момента на попадението. С това ние имаме всички данни за определяне на координатите на точката на попадението в координатната система, при която осите Oy и Oz сключват ъгъл $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Но тази точка е същевременно точка от траекторията, която отговаря на дадения ъгъл на изстрела α с начална скорост v_0, познаването на която в дадения случай не е необходимо. Така ние имаме

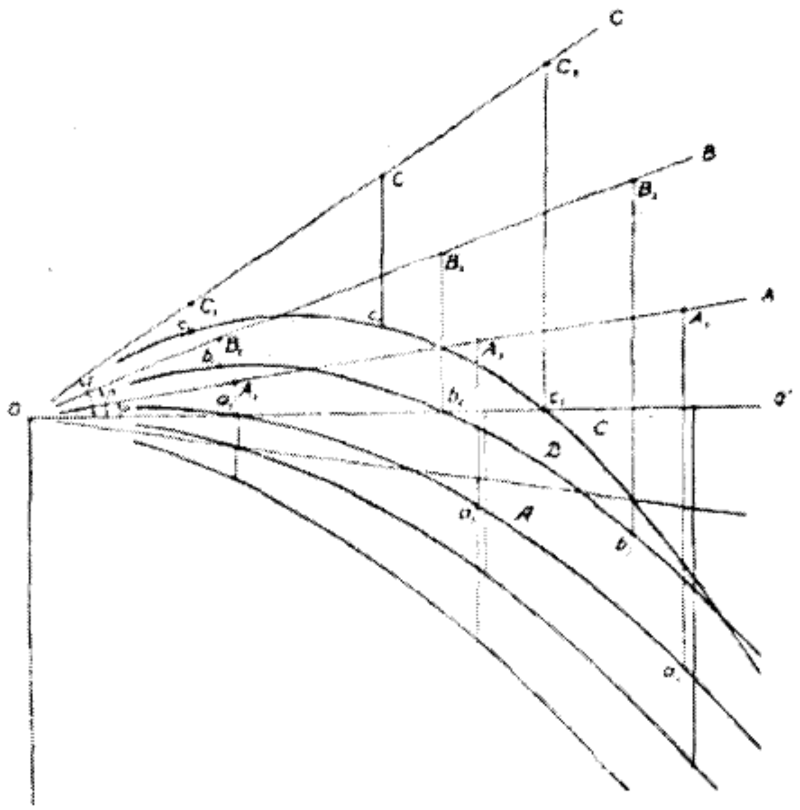
$$z(t) = d\ tg\alpha, \qquad y(t) = \frac{d}{\cos\alpha}.$$

Познаваме ли координатите за даден момент t на една точка върху дадена траектория α, с това ние познаваме координатите в съответната координатна система на съответната точка върху траекторията от фамилията траектории, които отговарят на същата начална скорост при най-различни ъгли α на изстрела. Една точка върху дадена траектория води до познаването на съответните точки върху цялата фамилия траектории v_0.

Методът, който Кирил Попов предлага, се състои в това: да се определят точно разстоянията на попадението в хоризонта на оръдието за ред траектории, които отговарят на една редица $\alpha, \beta, \gamma, ...$ на ъгли на изстрела. Всяка една такава точка води чрез прости конструкции до съответните точки на избраната редица траектории.

За тази цел си избираме на полигона една добре нивелирана хоризонтална ивица, по която се извършват всички опитни стрелби. Стреля се с едно и също оръдие, при един и същ снаряд и при един и същи заряд. Както пише Кирил Попов „ С най-голямо старание и точност се определят както ъгъла на изстрела, тъй също и попадението в хоризонта на отвора на оръдието." Определянето на времето не е необходимо, ако задачата се свежда само до определяне формата на траекториите във въздуха. То обаче е необходимо, ако искаме да знаем и момента, в който снарядът достига дадена точка на съответната траектория, както това е случаят при снаряди, които трябва да експлодират в дадена точка на траекторията.

Да означим с $\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...$ предварително избраните ъгли на изстрела, с A, B, C, D,... – съответните траектории, и с $a_1, b_2, c_3, d_4, ...$ – точките в хоризонта на тези траектории, определени и измерени на полигона (фиг. 6).



Фиг. 6

На един добре опънат чертежен лист означаваме отвора O на оръдието, хоризонта OO' и правите OA, OB, OC, $OD, \dots$, които сключват с хоризонта ъгли $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$. Върху правата OO', в избран мащаб нанасяме точките $a_1, b_2, c_3, d_4, \dots$, точки от съответните траектории, и на разстояние от O съответно на наблюдаваните и измерени разстояния на полигона.

През точката a_1, която е точка в хоризонта на траекторията A, прекарваме правата a_1A_1, успоредна на оста OZ, до пресичането ѝ с правата OA. По такъв начин получаваме координатите $y_1 = OA_1$, $z_1 = a_1A_1$ на точката a_1 от траекторията A в координатната система AOZ. За да получим съответните точки върху траекториите B, C, D, нанасяме върху правите OB, OC, OD точките B_1, C_1, D_1 на разстояние от O, равно на OA_1, и по правите, теглени от тези точки успоредно на оста OZ, нанасяме надолу точките $b_1, c_1, d_1, \dots$ на разстояние a_1A_1. Така получените точки $b_1, c_1, d_1, \dots$ са точки от траекториите B, C, D, които отговарят на точката a_1 от A.

За да получим точки на траекториите, които отговарят на точката b_2 от траекторията B, прекарваме през b_2 права, успоредна на OZ, до пресичането ѝ с правата OB. Да означим с B_2 съответната точка на пресичането. Така получаваме в координатната система BOZ координатите на точката b_2 от траекторията B

$$y_2 = OB_2, \; z_2 = B_2b_2,$$

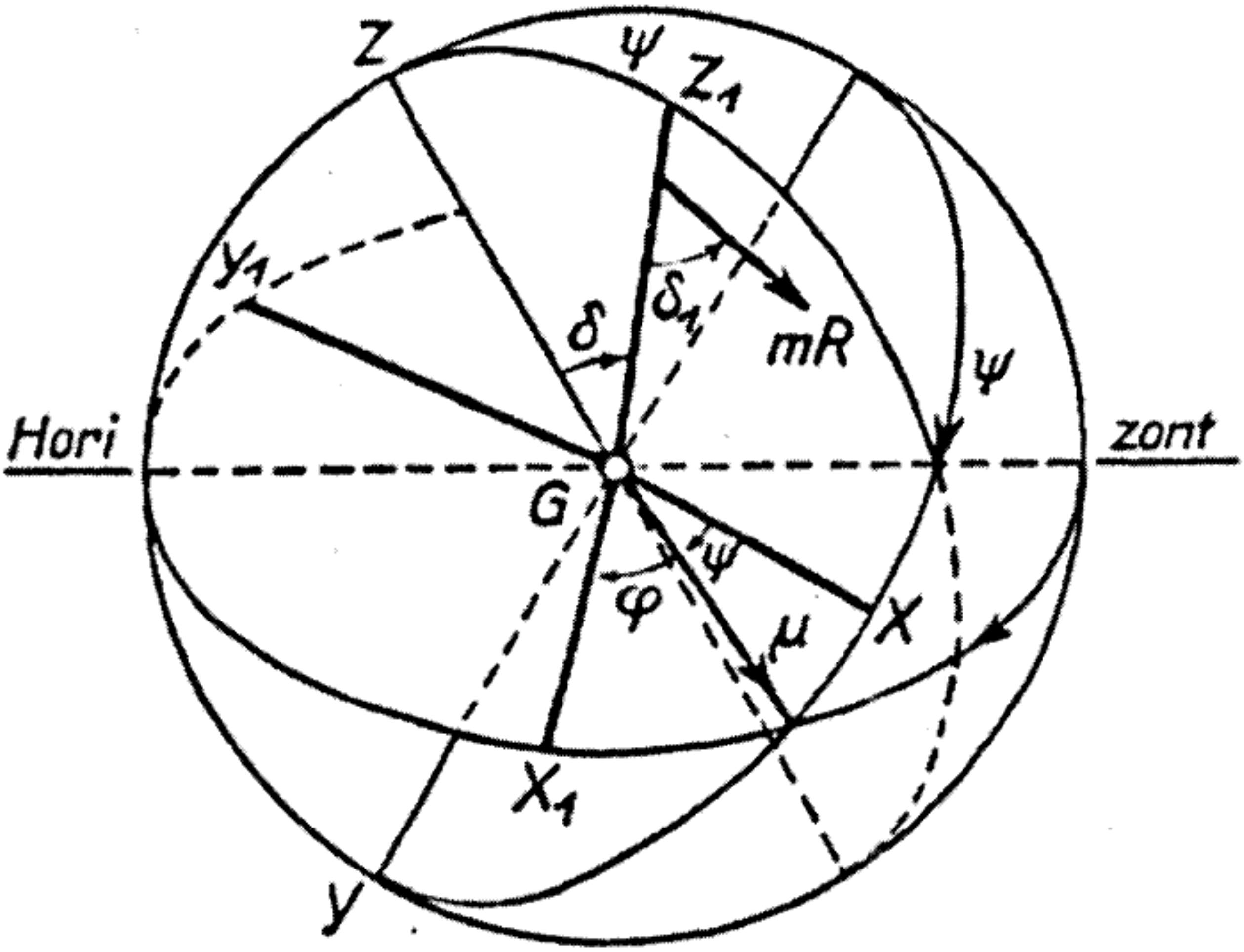
които са равни на координатите в съответните координатни системи на съответните точки $a_2, c_2, d_2, \dots$ върху траекториите A, C, D. За да получим тези точки, върху правите OA, OC, $OD, \dots$ и от началото O нанасяме точките $A_2, C_2, D_2, \dots$ на разстояние y_2, през които прекарваме прави, успоредни на OZ и върху които от $A_2, C_2, D_2, \dots$ нанасяме надолу на разстояние z_2 точките $a_2, c_2, d_2, \dots$, които са точки от траекториите A, C, D, съответни на точката b_2 от траекторията B.

По същия начин постъпваме с точката c_3 от траекторията C и т. н. и т. н.

По този начин по данни от стрелбите на полигона ние можем да възстановим точка по точка фамилията траектории, които отговарят на една и съща начална скорост v_0.

На една международна конференция по астронавтика във Варна през 1964 г., както отбелязва синът на Кирил Попов – Борис Попов, в спомени за баща си, Кирил Попов разказва на присъствалия на тази конференция виден американски учен от унгарски произход проф. Теодор фон Карман за конструирания от него успоредник с опънати между горната и долната страна нишки, чрез който може да се намери всяка възможна траектория на снаряд, ако се познава една. Проф. Карман е останал във възторг от този прост уред и е отбелязал, че може би този принцип е по-съвършен от методите, с които се определят траекториите на снарядите с помощта на компютри.•

Изложеният метод е включен в монографията на Кирил Попов „Основни проблеми на външната балистика в светлината на съвремената математика" ("Die Hauptprobleme der äusseren Balistik im Lichte der modernen Mathematik"), издадена в Лайпциг през 1954 г., която включва основните му изследвания по балистика. Тази монография е възникнала от лекциите, които Кирил Попов е чел в различни години по покана в Сорбоната, в университетите на Берлин, Мюнхен, Хамбург, Рим, в Института по аеродинамика „Кайзер Вилхелм" в Гьотинген, в Школата по приложение на артилерията в Торино и в Училището по морска артилерия в Париж. Част от изложения в книгата материал е удостоен с наградата „Монтийон" по механика за 1926 г. от Парижката академия на науките. Лекциите и публикациите му по балистика донасят на Кирил Попов световна известност и той е канен в много европейски университети. Оскъдното време не ми дава никаква възможност да се спра по-подробно на изложените в монографията резултати. Ще направя кратък коментар само по постановката на задачата за движение на снаряд и на естеството на трудностите, които трябва да се преодолеят при нейното решаване. Най-трудната за изследване част от задачата за движение на снаряд е задачата за движението му около масовия му център – защото вече става дума за движение на тяло, а не на точка, каквато е масовият център. Двете движения са свързани и движението около масовия център влияе по решаващ начин върху основните параметри на стрелбата и преди всичко върху точността на попаденията.



Фиг. 7

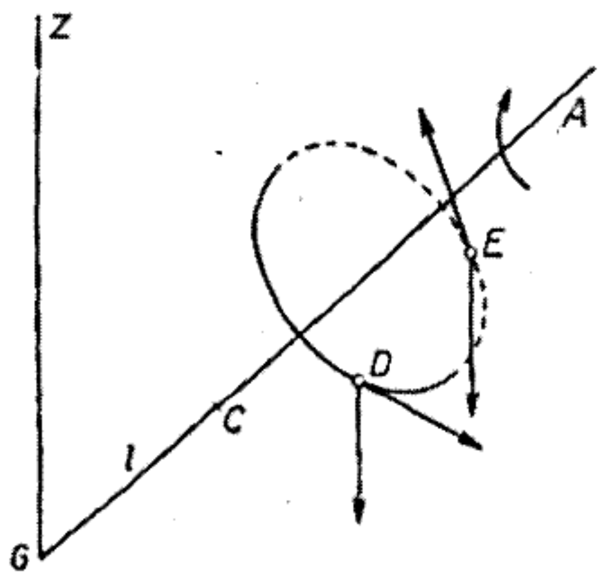
Със снаряда е неизменно свързана координатната система $Gx_1y_1z_1$, като G е масовият център на снаряда, а z_1 е оста на симетрия на снаряда (фиг. 7). Тази координатна система се движи по отношение на координатната система $Gxyz$, като се предполага, че оста Gz е по тангентата, оста Gy по главната нормала и оста Gx по бинормалата към траекторията на масовия център. Теоремата, определяща движението около масовия център, е теоремата за кинетичния момент, която гласи, че производната в инерциалното пространство на кинетичния момент на снаряда, пресметнат по отношение на масовия център, е равна на главния на момент на всички външни сили, действащи на снаряда спрямо масовия му център. Проектирано в системата $Gx_1y_1z_1$, това векторно равенство води до системата диференциални уравнения

$$\begin{aligned} &B\dot{p} + (C - B)\,qr = L \\ &B\dot{q} + (C - B)\,pr = M \\ &C\dot{r} = N, \end{aligned}$$

където p, q, r са компонентите на ъгловата скорост на снаряда, L, M, N – компонентите на главния момент на действащите външни сили, а B и C – инерчните моменти на снаряда за осите $x_1\ (y_1)$ и z_1.

Предполага се, че траекторията на масовия център на снаряда е равнинна крива; следователно реперът $Gxyz$ се върти само около бинормалата Gx. Положението на снаряда се определя от ъглите на Ойлер ψ, δ, φ.

Какви сили действат на снаряда, т.е. какви са величините L, M, N? Преди всичко това са силата на тежестта mg, която не оказва обаче влияние на движението около масовия център, защото нейният момент спрямо него е нулев, и силата на съпротивление $mR(v)$, която лежи в равнината на съпротивление (zGz_1) и сключва ъгъл δ_1 с оста на симетрия. И ъгълът δ_1, и точката на приложение на силата на съпротивление са неизвестни величини. Изобщо аеродинамичното въздействие е много сложно и освен силата на съпротивление се пораждат и странични сили на триене поради придадената на снаряда при изстрелването му голяма ъглова скорост около оста му на симетрия (фиг. 8).



Фиг. 8

Въртенето около оста на симетрия и промяната на нейното положение в пространството поражда и други ефекти като например ефекта на Магнус, завихряния, които също трябва да се отчитат. За да се отчетат всички тези явления и да може да се изгради представа за естеството на тези сили, трябва да се използват експериментални методи. Това обаче при типичните за балистиката скорости е необикновено сложна, практически неразрешима задача. Това налага да се строят хипотези, които само след сравняване на резултатите от стрелбата с математическите резултати въз основа на приетата хипотеза могат да бъдат потвърдени или опровергани. За това обаче е безусловно необходимо математическият апарат да позволява сигурни заключения въз основа на приетите хипотези, без да ги фалшифицира. Така става ясна важната роля на математическите методи: те трябва да допълнят оскъдните аеродинамични познания и да дадат възможност приетите аеродинамични хипотези да бъдат оценени.

Точно тук е заслугата на Кирил Попов. Той привлича за задачите на балистиката математическите методи, представени в работите на Поанкаре, Пикар, Бендиксон и Сандман, и ги доразвива. Вдъхновение за него е примерът на Поанкаре, който е бил негов преподавател и който го насочва в избора му на тема за докторската му дисертация. В книгата си „Нови методи на небесната механика" Поанкаре, използвайки теорията на конформните изображения и теорията на аналитичното продължение, получава важни резултати в небесната механика. Кирил Попов решава, както пише в предговора на книгата си, че „...времето е подходящо и балистичните теории да бъдат разгледани от тази гледна точка". Тук, разбира се, трудностите са от друго естество. Докато в небесната механика силите са централни и притежават потенциал, тук аеродинамичното съпротивление има съвсем друга природа, но независимо от това споменатите теории довеждат до нови резултати, отличаващи се освен с дълбочина също така и с елегантност.

Направеният кратък обзор на изследванията по балистика на Кирил Попов показва тяхната оригиналност и дълбочина. Те са получили световно признание и така са способствали много за издигане авторитета на българската наука.

Получена на 18.4.2006

Любомир Лилов
Факултет по математика и информатика
Софийски университет „ Св. Климент Охридски"
1164 София, п.к. 64, БЪЛГАРИЯ
E-mail: lilov@fmi.uni-sofia.bg